Е. Христов К. Влъчкова

ЗАДАЧИ и ТЕОРЕМИ

по

КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ

Е. Христов К. Влъчкова

ЗАДАЧИ и ТЕОРЕМИ

по

КОМПЛЕКСЕН АНАЛИЗ

София, май, 2004 г.

проф. д. м. н. Евгени Христов Христов
гл. ас. д-р Красимира Влъчкова Александрова
Софийски Университет „Св. Климент Охридски“
Факултет по Математика и Информатика
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/hristov
http://www.fmi.uni-sofia.bg/fmi/companal/krassivl

Задачи и теореми по комплексен анализ
за студентите от специалност „Приложна математика“
София, май, 2004 г.
Първо издание
Рецензент: проф. д. м. н. Рачо Денчев

ПРЕДГОВОР

Този сборник от задачи и теореми по комплексен анализ е предназначен преди всичко за студентите от специалностите „Приложна математика“ и „Математика и информатика“. Той съдържа задачи от основните раздели на комплексния анализ, които традиционно се изучават в университетския курс. По–голямата част от задачите са представени с решения, а останалите – с необходимите указания и отговори. Всеки раздел започва с достатъчно елементарни задачи, подпомагащи изучаването на базисния материал, като по-трудните задачи са отбелязани със символа ♠. Накратко са изложени и необходимите сведения от теорията на аналитичните функции. Те по никакъв начин не претендират за пълнота и изчерпателност и не могат да заменят изучаването на съответния материал с помощта на учебниците, цитирани в края на книгата. В края на сборника са представени задачи, които илюстрират ефективността на методите на комплексния анализ при решаване на проблеми от хидромеханиката, спектралната теория, квантовата механика и др.

Надяваме се, че така съставеният сборник ще е полезен на студентите за по–лесно усвояване на учебния материал и ще стимулира по–задълбоченото му изучаване.

София, 2004 г. Авторите

Съдържание

Глава 1

Комплексни числа

1.1 Комплексни числа и действия с тях

Дефиниция 1. *Комплексно число z се дефинира като наредена двойка реални числа (a, b).*

Две комплексни числа $z_1 = (a, b)$, $z_2 = (c, d)$ са равни тогава и само тогава, когато $a = c$ и $b = d$. **Събиране** *и* **умножение** *дефинираме по следния начин:*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d),$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Лесно се проверява, че горните действия с комплексни числа имат свойствата асоциативност, комутативност и дистрибутивност.
Множеството от комплексните числа, което означаваме[1] *с $\mathbb{C}$ е* **поле**, *защото има нула $0 := (0, 0)$ и единица $1 := (1, 0)$, удовлетворяващи съответно*

$$0 + z = z, \quad 1 \cdot z = z \quad \text{за всяко } z \in \mathbb{C},$$

а също така за всеки елемент $(a, b) \in \mathbb{C}$ съществуват обратни елементи относно събирането и умножението, съответно

$$(-a, -b), \quad \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2}\right).$$

Всяко реално число x се отъждествява с комплексното число $(x, 0)$, понеже изображението $x \to (x, 0)$ е взаимно-еднозначно. Комплексното число $i := (0, 1)$ ще наричаме **имагинерна единица**. *Изпълнено е, че $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$, т.е. i е корен на уравнението $z^2 = -1$. Всяко комплексно число $z = (x, y)$ можем да запишем във вида*

$$z = (x, 0)(1, 0) + (0, 1)(y, 0) = x \cdot 1 + i \cdot y = x + iy,$$

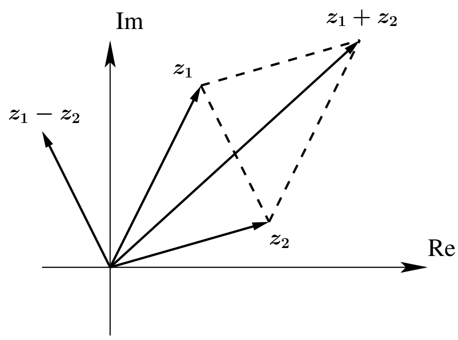
наричан **алгебричен вид** *на комплексното число z. Числата x и y се наричат съответно* **реална** *и* **имагинерна част** *на z и се означават*

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Ще отбележим, че комплексните числа в алгебричен вид се умножават и събират като многочлени на i, като i^2 се заменя с -1.

Ако в равнината е зададена ортогонална координатна система Oxy, на всяко комплексно число $z = x + iy$ може да съпоставим точката $z = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Така получаваме взаимно - еднозначно съответствие между множеството на комплексните числа и равнината, която се нарича **комплексна (гаусова) равнина** *и също се означава с $\mathbb{C}$.*

[1] За множествата на реалните, естествените и целите числа ще използваме съответните стандартни означения $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}$.



Фиг. 1.1: Събиране (транслация)

На всяко число $z \neq 0$ може да се съпостави вектор с начало $(0,0)$ и край (x,y), който ще означаваме също със z. Векторът z_1+z_2, който се получава по правилото на успоредника (фиг. 1.1), съответства на числото z_1+z_2. Следователно съответствието между комплексните числа и векторите в равнината се пренася и върху операцията събиране. Геометричната интерпретация на операцията събиране, $z_1 \rightarrow z_1+z_2$, е транслация на вектор z_2 (фиг. 1.1).

Комплексното число $x-iy$ се нарича **спрегнато** *на комплексното число $x+iy$ и се означава с $\bar{z}$. Величината $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$ се нарича* **модул** *на комплексното число $z=x+iy$. Изпълнено е, че*

$$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2. \tag{1.1}$$

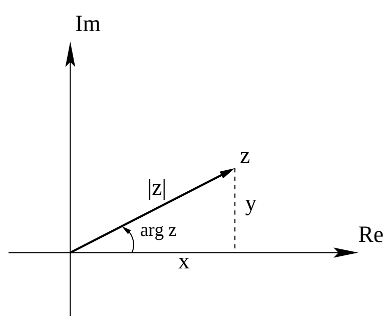
От геометричната интерпретация на операцията събиране (фиг. 1.1) следва **неравенството на триъгълника**

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \tag{1.2}$$

Ще отбележим, че $|z_1-z_2|$ е разстоянието между z_1 и z_2 и е изпълнено, че

$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|. \tag{1.3}$$

Ориентираният ъгъл между положителната посока на реалната ос и вектора z се нарича **аргумент** *на комплексното число $z=x+iy$ и се означава с* $\mathbf{arg}\ \boldsymbol{z}$ *(фиг. 1.2). Аргументът се определя с точност до кратно*



Фиг. 1.2: Геометрично представяне

на 2π и е изпълнено, че

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi, \tag{1.4}$$

където $\varphi = \arg z$. **Главното значение** *на аргумента се определя от условието*

$$-\pi < \arg z \leq \pi.$$

От (1.1) *и* (1.4) *получаваме* **тригонометричния** *вид*[2] *на комплексно число:*

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

В сила е следната **формула на Ойлер**[3]

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \tag{1.5}$$

откъдето следва, че

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{1.6}$$

От (1.5) *получаваме следния запис на тригонометричния вид на комплексно число:*

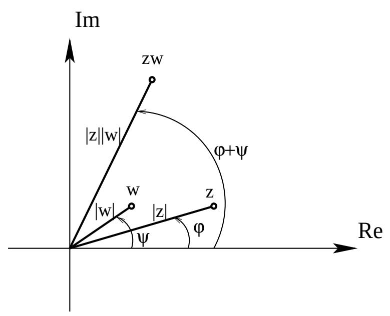
$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$$

.

Ако $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi)$, *то за произведението* $z\,w$ *получаваме*

$$z\,w = |z||w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)), \tag{1.7}$$

откъдето следва, че $|z\,w| = |z||w|$ *и* $\arg(z\,w) = \arg z + \arg w$. *Следователно геометричната интерпретация на операцията умножение,* $z \to zw$, *е последователно прилагане на хомотетия с център т. 0 и коефициент* $|w|$ *и ротация с център т. 0 на ъгъл* $\psi = \arg w$ *(фиг. 1.3).*



Фиг. 1.3: Умножение (ротация и хомотетия)

Ще отбележим някои основни свойства на въведените по-горе операции с комплексни числа.

Ако $z = x + iy \neq 0$, *то* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$.

Ако $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, *то*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ и } \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

Използвайки (1.7), *лесно се доказва чрез индукция по n следната*

[2] Тъй като връзката между декартовите координати (x, y) и полярните координати (ρ, φ) е $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, където $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, то тригонометричният вид се нарича още **полярна форма**.

[3] За дефиницията на показателната функция e^z, $z \in \mathbb{C}$ и доказателството на формулата на Ойлер вж. Глава 2, Елементарни трансцендентни функции.

Формула на Моавър. *Нека* $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. *Тогава за всяко естествено число* n *е изпълнено, че*

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \tag{1.8}$$

Формулата на Моавър (1.8) *може да се обобщи по следния начин:*

$$\begin{aligned} z_k = \sqrt[n]{z} &= \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \\ &= \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Доказателство на (1.9)**.** *Да разгледаме уравнението*

$$\zeta^n = z, \tag{1.10}$$

където при дадено $z \in \mathbb{C}$ *търсим решение* ζ. *Да представим* ζ *и* z *в тригонометричен вид, съответно* $\zeta = |\zeta|e^{i\arg\zeta}$, $z = |z|e^{i\varphi}$. *Тогава от* (1.8) *и* (1.10) *получаваме* $|\zeta|^n e^{i\,n\arg\zeta} = |z|e^{i\varphi}$, *откъдето следва, че*

$$|\zeta|^n = |z| \qquad \text{и} \qquad n\arg\zeta = \varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Следователно

$$|\zeta| = \sqrt[n]{|z|}, \quad \arg\zeta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

т. е. решенията ζ *на уравнението* (1.10) *се дават с формулата* (1.9). ■

Забележка.

(1) Геометрически значенията на $\sqrt[n]{z}$ *са разположени във върховете на правилен* n*-ъгълник, вписан в окръжност с център* $z = 0$ *и радиус* $\sqrt[n]{|z|}$.

(2) Уравнението

$$z^n = 1$$

има точно n *различни решения* $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *наричани* **n-ти корени на единицата**.

Задача 1.1.1 *Извършете действията и запишете отговора в алгебричен вид.*

(а) $\dfrac{1}{1-i}$ **(б)** $\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$

Решение.

(а) $$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

(б) $$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 i\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \\ &= -1 + i0 \end{aligned}$$

Задача 1.1.2 *Извършете действията и запишете отговора в алгебричен вид.*

(а) $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$ **(б)** $\left(\dfrac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$

(в) $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$

Отг. **(а)** $z = 6-8i$ **(б)** $z = -2+\dfrac{3}{2}i$

(в) $z = 2$

Задача 1.1.3 *Намерете модулите на числата*

(а) $\dfrac{4-3i}{2-i}$ **(б)** $\dfrac{(1-i)^{2004}}{(1+i)^{2004}}$

Решение.

(а) $$\left|\frac{4-3i}{2-i}\right| = \frac{|4-3i|}{|2-i|} = \frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{4+1}} = \sqrt{5}.$$

(б) $$\left|\frac{(1-i)^{2004}}{(1+i)^{2004}}\right| = \left|\frac{1-i}{1+i}\right|^{2004} = |-i|^{2004} = 1$$

Условие **(б)** може да реши и като забележим, че числото $1-i$ е спрегнато на $1+i$, следователно $|1-i| = |1+i|$. Тогава

$$\left|\frac{(1-i)^{2004}}{(1+i)^{2004}}\right| = \left(\frac{|1-i|}{|1+i|}\right)^{2004} = 1.$$

Задача 1.1.4 *Представете в тригонометричен вид чрез главната стойност на аргумента следните числа:*

(а) 1 **(б)** i

(в) $1-i$ **(г)** $\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}$

Решение. Първо намираме модула на числото, а после и главната стойност на аргумента му.

(а) $1 = 1+i0 = 1(1+i0) = 1(\cos 0 + i\sin 0) = e^{0\cdot i}$,

(б) $i = 1(0+i) = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}i}$,

(в) $1-i = \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$,

(г) $\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{2(1+i\sqrt{3})}{4} = 1\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = e^{\frac{\pi}{3}i}$.

Задача 1.1.5 *Да се намерят модулите и аргументите на следните комплексни числа z:*

$$\textbf{(а)}\ -\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7},\quad \textbf{(б)}\ (-4+3i)^3,\quad \textbf{(в)}\ \frac{(1+i)^8}{(1-i\sqrt{3})^6}.$$

Отг. **(а)** $|z|=1,\quad \arg z=\frac{6\pi}{7}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

(б) $|z|=125,\quad \arg z=-3\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

(в) $|z|=\frac{1}{4},\quad \arg z=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Задача 1.1.6 *Представете в тригонометричен вид числото*

$$z=1-\cos\alpha+i\sin\alpha,\qquad 0\le\alpha<2\pi.$$

Решение. Първо намираме модула на z,

$$|z|^2=(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha=2(1-\cos\alpha)=4\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

Тъй като $0\le\alpha<2\pi$, то $|z|=2\left|\sin\frac{\alpha}{2}\right|=2\sin\frac{\alpha}{2}$, . Тогава

$$\begin{aligned} z &= 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2i\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{\alpha}{2}\big(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\big)\\ &= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Следователно

$$z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i(2k\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2})},\quad k\in\mathbb{Z}.$$

Задача 1.1.7 ♠ *Като използувате формулата на Моавър* (1.8)*, докажете, че*

(а) $$\cos 4\varphi=8\cos^4\varphi-8\cos^2\varphi+1,$$

$$\cos 6\varphi=32\cos^6\varphi-48\cos^4\varphi+18\cos^2\varphi-1.$$

(б) *Намерете реалните корени на уравнението*

$$16x^6-28x^4+13x^2-1=0. \tag{1.11}$$

Решение. (а) От формулата на Моавър (1.8) за $n=4$ последователно получаваме

$$\begin{aligned} &\cos 4\varphi=\operatorname{Re}(\cos 4\varphi+i\sin 4\varphi)=\operatorname{Re}\Big((\cos\varphi+i\sin\varphi)^4\Big)\\ &=\operatorname{Re}\bigg(\cos^4\varphi+\binom{4}{1}\cos^3\varphi(i\sin\varphi)+\binom{4}{2}\cos^2\varphi(i\sin\varphi)^2\\ &\qquad+\binom{4}{3}\cos\varphi(i\sin\varphi)^3+\binom{4}{4}(i\sin\varphi)^4\bigg)\\ &=\cos^4\varphi-\binom{4}{2}\cos^2\varphi\sin^2\varphi+\binom{4}{4}\sin^4\varphi\\ &=\cos^4\varphi-6\cos^2\varphi(1-\cos^2\varphi)+(1-\cos^2\varphi)^2\\ &=8\cos^4\varphi-8\cos^2\varphi+1. \end{aligned}$$

Формулата за $\cos 6\varphi$ се доказва аналогично.

(б) Нека $x = \cos\varphi$. Тогава от **(а)** следва, че

$$16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1 = \frac{\cos 6\varphi - \cos 4\varphi}{2} = -\sin 5\varphi \sin\varphi.$$

Ако $\sin\varphi = 0$, то $\cos\varphi = \pm 1$. Следователно ± 1 са корени на уравнението (1.11). Изпълнено е, че

$$16x^6 - 28x^4 + 13x^2 - 1 = (x^2 - 1)(16x^4 - 12x^2 + 1).$$

Остава да намерим реалните корени на уравнението

$$16x^4 - 12x^2 + 1 = 0. \tag{1.12}$$

Ако положим $t = 2x$, уравнението (1.12) става $t^4 - 3t^2 + 1 = 0$. За неговите корени имаме, че $t_{1,2}^2 = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2} > 0$, откъдето следва, че уравнението (1.12) има четири реални корена

$$\pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}}.$$

Задача 1.1.8 *Използвайки формулата на Моавър* (1.9)*, пресметнете*

$$\textbf{(а)}\ \sqrt{i} \quad \textbf{(б)}\ \sqrt[8]{-1} \quad \textbf{(в)}\ \sqrt[5]{1-i} \quad \textbf{(г)}\ \sqrt[4]{\frac{2}{1-i\sqrt{3}}}.$$

Решение.

(а) $z_k = \sqrt{i} = e^{i\frac{\pi/2 + 2k\pi}{2}} = e^{i\frac{(4k+1)\pi}{4}},\ k = 0, 1$

(б) $z_k = e^{\frac{\pi + 2k\pi}{8}},\ k = 0, \dots, 7$

(в) $z_k = \sqrt[5]{1-i} = \sqrt[5]{\sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}} = \sqrt[10]{2}e^{\frac{-\pi+8k\pi}{20}i},\ k = 0, \dots, 4$

(г) $z_k = \sqrt[4]{\dfrac{2}{1-i\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{e^{\frac{i\pi}{6}}} = e^{i\frac{\pi/6 + 2k\pi}{4}} = e^{i\frac{(12k+1)\pi}{24}},\ k = 0, \dots, 3$

Задача 1.1.9 *Решете уравненията*

$$\textbf{(а)}\ z^2 = 3 - 4i \qquad \textbf{(б)}\ \bar{z} = z^3$$
$$\textbf{(в)}\ |z| - z = 1 - 2i.$$

Решение. (а) $z^2 = 3 - 4i = 5\left(\dfrac{3}{5} - i\dfrac{4}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad |z| = \sqrt{5}$. Ако означим $\arg z = \varphi$, то $\arg z^2 = 2\varphi$, следователно $\cos 2\varphi = \frac{3}{5}$ и $\sin 2\varphi = -\frac{4}{5}$. Тогава $\cos\varphi$ ще намерим чрез формулата $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ откъдето получаваме $\cos\varphi = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$. Също така от $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$ намираме $\sin\varphi = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$. Така получаваме $z = \sqrt{5}(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \pm(2 - i)$.

(б) $\bar{z} = z^3 \quad \Rightarrow |z| = |z|^3 \quad \Rightarrow \quad |z| = 0$ или $|z| = 1$ От $|z| = 0 \quad \Rightarrow$ $z = 0$. От $|z| = 1 \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\varphi},\ \varphi \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad e^{-i\varphi} = e^{3i\varphi} \quad \Rightarrow \quad -\varphi =$

$3\varphi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad \varphi = -\frac{k\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad z = e^{-ik\pi/2},\ k \in \mathbb{Z}$. Окончателно, решенията на уравнението са $z = 0;\ \pm i;\ \pm 1$.

(в) $|z| - z = 1 - 2i \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Im}\,(|z| - z) = -\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\,(1 - 2i) = -2 \quad \Rightarrow$ $\mathrm{Im}\, z = 2 \quad \Rightarrow \quad z = a + 2i$. Замествайки в уравнението, намираме $\sqrt{a^2 + 4} - a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{3}{2} + 2i$.

Задача 1.1.10 *Нека $\varphi,\ \psi \in \mathbb{R}$ са такива, че $0 \le \varphi - \psi \le \pi$. Представете в тригонометричен вид числата $e^{i\,\varphi} \pm e^{i\,\psi}$.*

Решение. Имаме, че

$$e^{i\,\varphi} \pm e^{i\,\psi} = e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}(e^{i\frac{\varphi-\psi}{2}} \pm e^{-i\frac{\varphi-\psi}{2}}).$$

От формулите (1.6) следва, че

$$\begin{aligned} e^{i\,\varphi} + e^{i\,\psi} &= 2\cos\frac{\varphi-\psi}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}}, \\ e^{i\,\varphi} - e^{i\,\psi} &= 2\,i\,\sin\frac{\varphi-\psi}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi}{2}} = 2\sin\frac{\varphi-\psi}{2} e^{i\frac{\varphi+\psi+\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Задача 1.1.11 *Нека $\alpha \in \mathbb{R}$. Използвайки формулите* (1.6), *пресметнете сумите:*

(а) $A = \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha$ **(б)** $B = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha,.$

Решение. Ще пресметнем числото $A + iB$. Имаме, че

$$\begin{aligned} A + iB &= \sum_{k=1}^{n} (\cos k\alpha + i\sin k\alpha) = \sum_{k=1}^{n} e^{ik\alpha} = e^{i\alpha}\frac{e^{i\alpha n} - 1}{e^{i\alpha} - 1} \\ &= \frac{\left(e^{i\frac{n}{2}\alpha} - e^{-i\frac{n}{2}\alpha}\right) e^{i\frac{n+1}{2}\alpha}}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2} e^{i\frac{n+1}{2}\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Отделяйки реалната и имагинерна част, получаваме

$$A = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \qquad B = \frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 1.1.12 ♠

(а) *Нека $P_{n-1}(z) = \dfrac{z^n - 1}{z - 1}$, $n \ge 2$. Намерете $P_{n-1}(1)$.*

(б) *Нека $z_k,\ k = 1, \ldots, n$, са върховете на правилен многоъгълник, вписан в единичната окръжност. Нека d_k е разстоянието между z_k и z_1. Докажете, че $\prod_{k=2}^{n} d_k = n$.*

(в) *Докажете, че $2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = n$.*

Решение.
(а) Тъй като $P_{n-1}(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + 1$, то $P_{n-1}(1) = n$.

(б) Без ограничение можем да считаме, че $z_1 = 1$. Тогава z_k са n-тите корени на единицата и $P_{n-1}(z) = \prod_{k=2}^{n}(z - z_k)$. Следователно $P_{n-1}(1) = \prod_{k=2}^{n}(1 - z_k) = n$. Тъй като $d_k = |1 - z_k|$, $k = 2, \ldots, n$, то $\prod_{k=2}^{n} d_k = n$.

(в) Последователно получаваме

$$\begin{aligned} n = \prod_{k=2}^{n}|1 - z_k| &= \prod_{k=1}^{n-1}|1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}| \\ &= \prod_{k=1}^{n-1}|e^{i\frac{k\pi}{n}}||e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}| = \prod_{k=1}^{n-1}| - 2i \sin\frac{k\pi}{n}| \\ &= 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}. \end{aligned}$$

Задача 1.1.13 (**закон на успоредника**) *Нека a и b са произволни комплексни числа. Докажете, че*

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2.$$

Каква е геометричната интерпретация на доказаното тъждество?

Решение.

$$|a + b|^2 + |a - b|^2 = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) + (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = 2a\bar{a} + 2b\bar{b} = 2|a|^2 + 2|b|^2.$$

Задача 1.1.14 *Да се докаже, че за всеки n на брой числа $z_1, \ldots z_n$, е в сила неравенството*

$$|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|.$$

Решение. Неравенството се доказва чрез индукция по n. Ще отбележим, че за $n = 1$ получаваме неравенството на триъгълника (1.2), което можем да докажем и аналитично по следния начин:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\bar{z}_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Задача 1.1.15 (**неравенство на Коши**) *Да се докаже, че за всеки $2n$ на брой комплексни числа*

$$z_1, z_2, \ldots, z_n; \qquad \zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$$

е изпълнено неравенството

$$\left|\sum_{j=1}^{n} z_j\bar{\zeta}_j\right|^2 \leq \sum_{j=1}^{n}|z_j|^2\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j|^2. \tag{1.13}$$

Решение. Полагаме $A := \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2, \quad B := \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^2, \quad C := \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{\zeta}_j$. Ще докажем, че $|C|^2 \le AB$. Имаме, че

$$\begin{aligned} 0 \quad \le \quad & \sum_{j=1}^{n} |Bz_j - C\zeta_j|^2 = \sum_{j=1}^{n} (Bz_j - C\zeta_j)(B\bar{z}_j - \bar{C}\bar{\zeta}_j) \qquad (1.14) \\ = \quad & B^2 \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2 - B\bar{C} \sum_{j=1}^{n} z_j \bar{\zeta}_j - BC \sum_{j=1}^{n} \bar{z}_j \zeta_j + |C|^2 \sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^2 \\ = \quad & B^2 A - 2BC\bar{C} + |C|^2 B \\ = \quad & B^2 A - B|C|^2 = B(AB - |C|^2). \end{aligned}$$

От (1.14) следва, че в (1.13) има равенство тогава и само тогава, когато когато $Bz_j = C\zeta_j$, $j = 1, \dots n$, т. е. когато $z_j = \alpha \zeta_j$, $j = 1, \dots n$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Задача 1.1.16 *(***Питагорова теорема***) Нека z_1, z_2, z_3 са три различни комплексни числа. Докажете, че равенствата*

$$|z_1 - z_3|^2 = |z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 \qquad (1.15)$$

и

$$z_3 - z_2 = i\beta(z_2 - z_1) \qquad (\beta \ne 0,\, \beta \in \mathbb{R}) \qquad (1.16)$$

са еквивалентни и направете геометрична интерпретация на получения резултат.

Решение. Да положим $\mu := \dfrac{z_3 - z_2}{z_2 - z_1}$. Тогава $z_3 - z_2 = \mu(z_2 - z_1)$ и

$$z_3 - z_1 = z_3 - z_2 + z_2 - z_1 = (1 + \mu)(z_2 - z_1).$$

Равенството (1.15) е еквивалентно на

$$|1 + \mu|^2 = 1 + |\mu|^2, \text{ т. е. } (1 + \mu)(1 + \bar{\mu}) = 1 + \mu\bar{\mu},$$

откъдето получаваме $\mu + \bar{\mu} = 2 \operatorname{Re} \mu = 0$. Последното равенство е еквивалентно на $\mu = i\,\beta$, което е точно неравенството (1.16) ($\beta \ne 0$ следва от $z_1 \ne z_2 \ne z_3 \ne z_1$).

Задача 1.1.17 *Докажете, че уравнението*

$$a\,z - \bar{a}\,\bar{z} + b = 0, \text{ където } a \in \mathbb{C},\ a \ne 0,\ b = ih,\ h \in \mathbb{R},$$

е декартово уравнение на права, т. е. уравнение от вида $Ax + By + C = 0$, A, B, $C \in \mathbb{R}$.

Решение. Като заместим в даденото уравнение със $z = x + iy$, получаваме

$$\begin{aligned} a(x + iy) - \bar{a}(x - iy) + ih \quad &= (a - \bar{a})x + i(a + \bar{a})y + ih \\ &= 2i \operatorname{Im} a\, x + 2i \operatorname{Re} a\, y + ih = 0. \end{aligned}$$

Като положим $A := \operatorname{Re} a$, $B := \operatorname{Im} a$, $C := h$, получаваме исканото твърдение.

Задача 1.1.18 *Докажете, че уравнението*

$$z\bar{z} + l\,z + \bar{l}\bar{z} + m = 0, \text{ където } m \in \mathbb{R},\ m < |l|^2,$$

е декартово уравнение на окръжност, т. е. уравнение от вида $(x-A)^2 + (y-B)^2 = C^2$, $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Задача 1.1.19 *Нека* $\triangle a\,b\,c$ *е положително ориентиран.*[4] *Докажете, че*

$$\triangle a\,b\,c \text{ е равностранен} \iff a + b\omega + c\omega^2 = 0, \text{ където } \omega = e^{\frac{2}{3}\pi\,i}.$$

Решение. Първо ще покажем, че ако транслираме $\triangle a\,b\,c$ на вектор $d \neq 0$, където $d \in \mathbb{C}$, твърдението остава в сила, т. е. ще докажем, че

$$a + d + (b+d)\omega + (c+d)\omega^2 = a + b\omega + c\omega^2.$$

Последното равенство следва от

$$1 + \omega + \omega^2 = \frac{1-w^3}{1-w} = 0,$$

защото $\omega = e^{\frac{2}{3}\pi\,i}$. Сега да транслираме $\triangle a\,b\,c$ така, че $a \equiv 0$. Остава да докажем, че

$$\triangle 0\,b\,c \text{ е равностранен} \iff b + c\omega = 0.$$

$\Rightarrow$ Нека $\triangle 0\,b\,c$ е равностранен. Това е изпълнено тогава и само тогава, когато $c = be^{\frac{i\pi}{3}}$. Следователно

$$b + c\omega = b + be^{\frac{i\pi}{3}}e^{\frac{2}{3}\pi\,i} = b - b = 0. \tag{1.17}$$

$\Leftarrow$ Следва от (1.17).

Задача 1.1.20 *Нека* $\triangle a\,b\,c$ *е отрицателно ориентиран. Докажете, че*

$$\triangle a\,b\,c \text{ е равностранен} \iff a\omega^2 + b\omega + c = 0, \text{ където } \omega = e^{\frac{2}{3}\pi\,i}.$$

Задача 1.1.21 *Намерете медицентъра на* $\triangle a\,b\,c$.

Отг. $\frac{a+b+c}{3}$

Задача 1.1.22 *Докажете, че лицето* S *на положително ориентирания* $\triangle a\,b\,c$ *е*

$$S = \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\,(\bar{a}\,b + \bar{b}\,c + \bar{c}\,a).$$

Решение. Първо ще покажем, че ако транслираме $\triangle a\,b\,c$ на вектор $d \neq 0$, където $d \in \mathbb{C}$, то

$$\mathrm{Im}\,(\bar{a}\,b + \bar{b}\,c + \bar{c}\,a) = \mathrm{Im}\left(\overline{a+d}\,(b+d) + \overline{b+d}\,(c+d) + \overline{c+d}\,(a+d)\right),$$

[4] $\triangle a\,b\,c$ наричаме **положително ориентиран**, ако ориентираният ъгъл $\angle b\,a\,c$ е такъв, че $0 < \angle b\,a\,c < \pi$. Съответно, $\triangle a\,b\,c$ е **отрицателно ориентиран**, ако $0 < \angle c\,a\,b < \pi$.

т. е. S е инвариантно при транслация на $\triangle a\,b\,c$. След разкриване на скобите получаваме, че горното равенство е еквивалентно на

$$\operatorname{Im}\big((\bar a+\bar b+\bar c)d+(a+b+c)\bar d+3|d|^2\big)=0.$$

Това равенство е вярно, защото първите две събираеми са комплексно спрегнати и освен това $|d|\in\mathbb{R}$.

Нека сега транслираме $\triangle a\,b\,c$ така, че $a\equiv 0$. Трябва да покажем, че лицето на $\triangle 0\,b\,c$ е $S=\dfrac{1}{2}\operatorname{Im}\bar b c$. Да означим с α ориентирания ъгъл при върха 0. Тогава $c=\dfrac{|c|}{|b|}e^{i\alpha}b\Rightarrow$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\operatorname{Im}\bar b c &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\big(\frac{|c|}{|b|}e^{i\alpha}b.\bar b\big)=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\big(|b||c|e^{i\alpha}\big)\\ &= \frac{1}{2}\,|b||c|\sin\alpha=S.\end{aligned}$$

Задача 1.1.23 *Нека $\triangle a\,b\,c$ е положително ориентиран и p е негова вътрешна точка. Нека $a_1,\ b_1,\ c_1$ са медицентрове съответно на $\triangle b\,c\,p,\quad \triangle c\,a\,p$, $\triangle a\,b\,p$. Докажете, че $S_{a_1b_1c_1}=\dfrac{1}{9}S_{abc}$.*

Решение. Без ограничение ще предполагаме, че $p\equiv 0$. Тогава от зад. 1.1.22 и зад. 1.1.21 следва, че

$$\begin{aligned}S_{a_1b_1c_1} &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\overline{a_1}\,b_1+\overline{b_1}\,c_1+\overline{c_1}\,a_1\right)\\ &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\big(\frac{\overline{b+c+p}}{3}\cdot\frac{a+c+p}{3}+\frac{\overline{a+c+p}}{3}\cdot\frac{a+b+p}{3}\\ &\quad+\frac{\overline{a+b+p}}{3}\cdot\frac{b+c+p}{3}\big)\\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Im}\big(\frac{\overline{b+c}}{3}\,\frac{a+c}{3}+\frac{\overline{a+c}}{3}\,\frac{a+b}{3}+\frac{\overline{a+b}}{3}\,\frac{b+c}{3}\big)\\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Im}\Big(\bar a b+\bar b c+\bar c a+|a|^2+|b|^2+|c|^2\\ &\quad+(\bar a b+a\bar b)+(\bar a c+a\bar c)+(\bar b c+b\bar c)\Big)\\ &= \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Im}\big(\bar a b+\bar b c+\bar c a\big)=\frac{1}{9}\,S.\end{aligned}$$

Задача 1.1.24 *Нека $a_1a_2\dots a_n$ е положително ориентиран многоъгълник. Докажете, че*

$$S_{a_1a_2\dots a_n}=\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(\bar a_1a_2+\bar a_2a_3+\ldots+\bar a_na_1\right)$$

.

Упътване. Прекарайте диагоналите на многоъгълника през върха a_1 и използвайте зад. 1.1.22.

Задача 1.1.25 *Нека $a_1a_2\dots a_{2n}$ е положително ориентиран многоъгълник. Докажете, че ако транслираме нечетните му върхове на вектор b, то лицето на получения многоъгълник е равно на лицето на първоначалния многоъгълник.*

Упътване. Използвайте зад. 1.1.22.

Задача 1.1.26 *Нека p е произволна права през началото O и нека комплексните числа $z_1,\dots,z_n$, $n\in\mathbb{N}$ лежат в една и съща полуравнина относно p. Докажете, че*

$$z_1+z_2+\ldots+z_n\neq 0 \ \text{и}\ \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n}\neq 0.$$

Твърдението е вярно и ако всички числа с изключение на едно лежат върху p.

Решение. От геометрични съображения е ясно, че ако z_1 и z_2 са от едната страна на p, то сумата z_1+z_2 като диагонал на съответния успоредник е също от тази страна на p. За второто неравенство е достатъчно да забележим, че $\arg\bar{z}=\arg\frac{1}{z}$.

Може да дадем и аналитично решение: Завъртаме комплексната равнина така, че правата p да съвпада с имагинерната ос, т. е. умножаваме с $e^{-i\alpha}$, където α е ъгъла, който p сключва с положителната посока на реалната ос. Тогава

$$\mathrm{Re}z_j>0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Re}(z_1+z_2+\ldots+z_n)>0 \quad\Rightarrow\quad z_1+z_2+\ldots+z_n\neq 0.$$

Също така

$$\mathrm{Re}\frac{1}{z_j}>0 \quad\Rightarrow\quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n}\right)>0 \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\ldots+\frac{1}{z_n}\neq 0.$$

Задача 1.1.27 *Нека $z_1,z_2,\dots,z_n$ са комплексни числа, такива че $z_1+z_2+\ldots+z_n=0$. Тогава всяка права g, минаваща през началото O, разделя тези числа, т. е. те лежат и от двете страни на правата (с изключение на частния случай, при който всичките точки са върху правата).*

Решение. Ако допуснем, че съществува права, такава, че всички точки да лежат от едната ѝ страна, то от задача 1.1.26 следва, че $z_1+z_2+\ldots+z_n\neq 0$.

Задача 1.1.28 *Нека $z_1,z_2,\dots,z_n$ са произволни числа в комплексната равнина и нека $m_1>0$, $m_2>0,\dots,m_n>0$ са такива, че $m_1+m_2+\ldots+m_n=1$. Нека $z=m_1z_1+m_2z_2+...+m_nz_n$. Да се докаже, че всяка права през точката z разделя точките $z_1,z_2,\dots,z_n$, с изключение на случая, когато всички те лежат върху тази права. (Точката z се нарича* **център на тежестта** *на системата от точки $z_1,\dots,z_n$ със съответни маси $m_1,\dots,m_n$.)*

Решение. Имаме, че

$$m_1(z_1-z)+m_2(z_2-z)+...+m_n(z_n-z)=0.$$

Според задача 1.1.27, всяка права през точката 0 разделя множеството от точки $m_j(z_j-z)$. Тогава тя разделя и множеството от точки (z_j-z), понеже аргументите на $m_j(z_j - z)$ и $(z_j - z)$ съвпадат. По-нататък, след транслация с вектор z, получаваме, че всяка права, минаваща през точка z, разделя множеството от точки z_j.

Задача 1.1.29 (Теорема на Гаус-Люка) *Нека $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n$ е произволен полином с комплексни коефициенти. Нека M е изпъкналата обвивка*[5] *на нулите на $f(z)$. Докажете, че нулите на $f'(z)$ също принадлежат на M.*

Решение. Нека $z_1, z_2, \ldots, z_n$ са нулите на $f(z)$ и нека $f'(z_0) = 0$. Ако $f(z_0) = 0$, твърдението е очевидно. Нека $f(z_0) \neq 0$. Тогава е изпълнено, че

$$0 = \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z_0 - z_\nu}. \tag{1.18}$$

Да допуснем, че $z_0 \notin M$. Тогава съществува права през z_0, която не пресича M и следователно $z_0 - z_\nu$ се намират от едната ѝ страна. От задача 1.1.26 следва, че $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{z_0 - z_\nu} \neq 0$, което е противоречие с (1.18).

1.2 Редици от комплексни числа

Дефиниция. Казваме, че редицата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ от комплексни числа е **сходяща** и $a_n \to a$ при $n \to \infty$, $a \in \mathbb{C}$, ако $|a_n - a| \to 0$ при $n \to \infty$. Числото a се нарича **граница** на редицата.

Първо ще разгледаме някои основни задачи от сходимост на редици от комплексни числа.

Задача 1.2.1 *Докажете, че $a_n \to a$ при $n \to \infty \iff \operatorname{Re} a_n \to \operatorname{Re} a$, $\operatorname{Im} a_n \to \operatorname{Im} a$ при $n \to \infty$.*

Решение. Нека $a_n = \alpha_n + i\beta_n,\ a = \alpha + i\beta$.
$\Rightarrow$ От дефиницията за сходимост следва, че

$$|a_n - a| = \sqrt{(\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2} \to 0.$$

Тъй като е изпълнено, че

$$|\alpha_n - \alpha| \leq \sqrt{(\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2},$$

$$|\beta_n - \beta| \leq \sqrt{(\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2},$$

то $|\alpha_n - \alpha| \to 0$, $|\beta_n - \beta| \to 0$, т.е. $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$.
$\Leftarrow$ В тази посока твърдението е очевидно.

Задача 1.2.2 *Докажете, че ако $a_n \to a$, то $|a_n| \to |a|$, $n \to \infty$.*

Решение. Следва от дефиницията за сходимост и неравенството $\Big||a_n| - |a|\Big| \leq |a_n - a|$. В обратната посока твърдението не е вярно (разгледайте редицата общ член $a_n = (-1)^n$).

[5]**Изпъкнала обвивка** на множеството A се нарича най-малкото изпъкнало множество, което съдържа A, т.е. сечението на всички изпъкнали множества, съдържащи A. Ако A се състои от краен брой точки (както в разглежданата задача), то изпъкналата му обвивка е изпъкнал многоъгълник, т.е. сечение на полуравнини.

Задача 1.2.3 *Нека* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *е сходяща редица,* $a_n \to a \neq 0$ *при* $n \to \infty$, *като*

$$a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad a_n = |a_n|(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n), \quad 0 \leq \varphi,\, \varphi_n < 2\pi.$$

Докажете, че ако $\varphi \neq 0$, *то*

$$|a_n| \to |a|, \qquad \varphi_n \to \varphi. \tag{1.1}$$

Решение. От задача 1.2.2 следва, че $|a_n| \to |a|$. За да докажем второто равенство в (1.1), ще допуснем обратното, т. е. $\varphi_n \not\to \varphi$. Тъй като редицата φ_n е ограничена ($0 \leq \varphi_n < 2\pi$), то съществува сходяща подредица $\varphi_{n_k} \to \psi \neq \varphi$ ($0 \leq \psi \leq 2\pi$). След граничен преход получаваме, че $a_{n_k} = |a_{n_k}|(\cos\varphi_{n_k} + i\sin\varphi_{n_k}) \to |a|(\cos\psi + i\sin\psi)$. От друга страна, $a_{n_k} \to a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Следователно $\varphi - \psi = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, което е невъзможно.

Задача 1.2.4 *Нека* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *е редица, за която* $|a_n| \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогава и* $a_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Решение. Нека $a_n = \alpha_n + i\beta_n$. По условие $|a_n| = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \to 0$ и от неравенствата $0 \leq |\alpha_n| \leq \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ следва, че $|\alpha_n| \to 0$, откъдето $\alpha_n \to 0$. Аналогично получаваме, че $\beta_n \to 0$. Следователно $a_n = \alpha_n + i\beta_n \to 0$.

Задача 1.2.5 *Намерете границата при* $n \to \infty$ *на редицата с общ член*

$$a_n = 1 + \frac{1}{2}\cos\varphi + \ldots + \frac{1}{2^n}\cos n\varphi.$$

Решение. Нека $b_n = \dfrac{1}{2}\sin\varphi + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\sin n\varphi$.

$$\begin{aligned} \text{Тогава } a_n + i\,b_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}(\cos k\varphi + i\sin k\varphi) = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{i\varphi}}{2}\right)^k \\ &= \frac{1 - \frac{e^{i(n+1)\varphi}}{2^{n+1}}}{1 - \frac{e^{i\varphi}}{2}}. \end{aligned}$$

Тъй като $\left|\dfrac{e^{i(n+1)\varphi}}{2^{n+1}}\right| = \dfrac{1}{2^{n+1}} \to 0$ при $n \to \infty$, то $\dfrac{e^{i(n+1)\varphi}}{2^{n+1}} \to 0$. Следователно $a_n + ib_n \to \dfrac{2}{2 - e^{i\varphi}}$, откъдето следва, че

$$a_n \to \operatorname{Re}\left(\frac{2}{2 - e^{i\varphi}}\right) = \frac{2(2 - \cos\varphi)}{5 - 4\cos\varphi}.$$

В следващата задача е показан един от начините за дефиниране на функцията e^z, $z \in \mathbb{C}$, който е обобщение на дефиницията на функцията e^x, $x \in \mathbb{R}$. Ще напомним, че

$$e^x := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \; x \in \mathbb{R}.$$

Задача 1.2.6 ♠ *Нека $z = x + iy$. Докажете, че*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Решение. Нека напомним, че $|z^n| = |z|^n$, $\arg z^n = n\arg z$, $\arg z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ (при $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$). Следователно

$$\left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = e^{\frac{n}{2}\ln\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)}, \qquad (1.2)$$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n\operatorname{arctg}\frac{\frac{y}{n}}{1+\frac{x}{n}}. \qquad (1.3)$$

(Тук използваме, че $-\frac{\pi}{2} < \arg(1+\frac{z}{n}) < \frac{\pi}{2}$ при достатъчно голямо n поради факта, че $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{z}{n}) = 1$.)

Като извършим граничен преход в (1.2) и (1.3), използвайки правилото на Лопитал, получаваме, че

$$\lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n = e^x, \quad \lim_{n\to\infty}\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = y.$$

Задача 1.2.7 ♠ *Нека*

$$z_n = (1+\frac{i}{\sqrt{1}})(1+\frac{i}{\sqrt{2}})\dots(1+\frac{i}{\sqrt{n}}) = |z_n|e^{i\varphi_n},$$

където $0 < \varphi_n - \varphi_{n-1} < \frac{\pi}{2}$.

(а) *Докажете, че отсечката с краища z_{n-1} и z_n, $n = 2, 3, \dots$ има дължина 1.*

(б) *Докажете, че* $\dfrac{|z_n| - |z_{n-1}|}{\varphi_n - \varphi_{n-1}} \to \dfrac{1}{2}$ *при $n \to \infty$.*

Решение. (а) Дължината на отсечката с краища z_n и z_{n-1} е $|z_n - z_{n-1}|$. Тъй като

$$z_n - z_{n-1} = (1+\frac{i}{\sqrt{1}})(1+\frac{i}{\sqrt{2}})\dots(1+\frac{i}{\sqrt{n-1}})\frac{i}{\sqrt{n}},$$

то

$$\begin{aligned}|z_n - z_{n-1}|^2 &= (1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\dots(1+\frac{1}{n-1})\frac{1}{n}\\ &= \frac{2.3\dots n}{1.2\dots n-1}\cdot\frac{1}{n} = 1\end{aligned}$$

(б) Имаме, че

$$|z_n|^2 = (1+\frac{1}{1})(1+\frac{1}{2})\dots(1+\frac{1}{n}) = n+1$$

и

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} = \arg\frac{z_n}{z_{n-1}} = \arg(1+\frac{i}{\sqrt{n}}) = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Тогава

$$\frac{|z_n| - |z_{n-1}|}{\varphi_n - \varphi_{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}} \to \frac{1}{2} \text{ при } n \to \infty.$$

Задача 1.2.8 *Да се докаже, че редицата с общ член $a_n = z^n$ е сходяща за $|z| < 1$ и за $z = 1$ и разходяща за $|z| \geq 1$, $z \neq 1$.*

Решение. Ако $|z| < 1$, то $|a_n| = |z|^n \to 0$, откъдето $a_n \to 0$ (зад. 1.2.4).

При $z = 1$ имаме $a_n = 1 \to 1$.

В случая $|z| > 1$, да допуснем, че $a_n \to l$. Тогава $|a_n| \to |l|$, което е невъзможно поради $|a_n| = |z|^n \to \infty$.

Остана да разгледаме случая $|z| = 1$, $z \neq 1$. Ако допуснем, че $a_n = z^n \to l$, то за редицата $b_n = z^{n+1} - z^n$ намираме $b_n \to l - l = 0$. Следователно $|b_n| \to 0$. Но $|b_n| = |z|^n|z-1| = |z-1| \to |z-1| \neq 0$.

Следващата задача, известна като **теорема на Якоби**, дава по-прецизна информация за поведението на редицата a_n в последния случай.

Задача 1.2.9 ♠ *Нека z е комплексно число, за което $|z| = 1$. Изследвайте точките на сгъстяване на редицата с общ член $a_n = z^n$.*

Решение. Нека $z = e^{2i\pi\alpha}$, $0 \leq \alpha < 1$. Има два принципно различни случая:

(а) α — рационално ($\alpha = p/q$, където p и q са взаимно прости). Ще покажем, че в редицата $a_n = z^n = e^{2i\pi\alpha n}$ има точно q различни числа, $e^{2i\pi k/q}$ ($k = 0, 1, 2, \ldots, q-1$), и следователно това са всичките точки на сгъстяване. Наистина, всяко естествено число n има вида $n = \lambda q + \mu$ (λ, μ — цели, $0 \leq \mu < q$) и затова $a_n = e^{2i\pi(\lambda q+\mu)/q} = e^{2i\pi\mu/q}$. От друга страна, за всяко $k = 0, 1, \ldots, q-1$ числото $e^{2i\pi k/q}$ е член на редицата a_n, защото p и q са взаимно прости и следователно $\lambda p + \mu q = 1$ за някакви цели λ и μ, поради което

$$e^{2i\pi k/q} = e^{2i\pi k(\lambda p+\mu q)/q} = e^{2i\pi k\lambda p/q} = z^{k\lambda} = a_{k\lambda}.$$

Ако $\lambda < 0$, тогава вместо двойката (λ, μ) ще вземем двойката $(\lambda' = \lambda + sq,\ \mu' = \mu - sp)$, където естественото число s е така избрано, че $\lambda' > 0$.

(б) α — ирационално. Ще покажем, че множеството от точките на сгъстяване на редицата a_n е единичната окръжност $K = \{z : |z| = 1\}$. Наистина, $a_n \in K$ за всяко n, така че $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ няма точки на сгъстяване вън от K (доказва се с допускане на противното). Освен това $a_m \neq a_n$ при $m \neq n$, защото иначе бихме получили

$$e^{2i\pi\alpha m} = e^{2i\pi\alpha n} \quad \Rightarrow \quad 2\pi\alpha m - 2\pi\alpha n = 2k\pi \ (k \text{ — цяло}) \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{k}{m-n},$$

т. е. α е рационално число. Също така, редицата a_n е ограничена ($|a_n| = 1$) и значи има поне една точка на сгъстяване z_0. Тогава за всяко $\varepsilon > 0$ съществуват a_m и a_n (различни!) такива, че

$$|a_m - z_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |a_n - z_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \Rightarrow \quad |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Ако за определеност приемем, че $m > n$, то

$$|a_{m-n} - 1| = |a_{m-n} - 1||a_n| = |(a_{m-n} - 1)a_n| = |a_m - a_n| < \varepsilon,$$

което означава, че подредицата $\{a_{(m-n)k}\}_{k=1}^{\infty}$ разделя окръжността K на малки дъги (краищата на всяка дъга са на разстояние по-малко от ε един от друг). Тогава, ако z_1 е произволна точка от K, тя ще лежи на една от тези (затворени) дъги и следователно всеки от двата края на дъгата ще бъде в ε-околност на z_1. И тъй като $\varepsilon > 0$ е произволно, то z_1 е точка на сгъстяване за $\{a_n\}$.

1.3 Топология на комплексната равнина. Криви

Множеството на комплексните числа $\mathbb{C}$ освен поле е и топологично пространство. Да въведем в $\mathbb{C}$ евклидова метрика като отъждествим $\mathbb{C}$ с равнината $\mathbb{R}^2$, снабдена със стандартната евклидова метрика. Тази метрика определя естествена топология в $\mathbb{C}$. По-долу ще дадем някои общи дефиниции и свойства, отнасящи се за топологичните и метрични пространства, във форма, удобна за по-нататъшното ни изложение.

Дефиниция 1. *Множеството $\Big\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\Big\}$, където $r > 0$ е произволно реално число, се нарича* **околност** *на точката z_0.*

Често ще използваме околността $|z| < 1$, която ще наричаме отворен **единичен кръг**.

Дефиниция 2. *Точката z_0, принадлежаща на множеството E, се нарича* **вътрешна** *за E, ако съществува околност на z_0, принадлежаща изцяло на E.*

Дефиниция 3. *Множеството E се нарича* **отворено**, *ако всяка негова точка е вътрешна за него.*

Ще отбележим, че всяка околност е отворено множество. Отворен интервал върху реалната ос не е отворено множество, понеже не съдържа отворен кръг.

Дефиниция 4. *Едно множество се нарича* **свързано**, *ако всеки две негови точки могат да се свържат с начупена линия, принадлежаща на множеството. Отворено и свързано множество се нарича* **област**.

Дефиниция 5. *Точката z_0 се нарича* **гранична** *за множеството E, ако всяка околност на тази точка съдържа едновременно и точки от E, и точки, които не принадлежат на E.* **Граница (контур)** *се нарича множеството от всички гранични точки. Множеството E е* **затворено**, *ако съдържа всички свои гранични точки или няма гранични точки.*

Дефиниция 6. *Множеството E е* **ограничено**, *ако се съдържа в някоя околност на началото, т. е съществува число $R > 0$, така че $|z| < R$ за всяко $z \in E$. Ограничено и затворено множество се нарича* **компакт**.

Дефиниция 7. *Ако на всяко значение t от интервала $a < t < b$ е съпоставено комплексно число $z(t) = x(t) + iy(t)$, където $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$, $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$, казваме, че върху интервала (a, b) е дефинирана* **комплекснозначна функция** $z(t)$ **на реалната променлива** t.

Граница, производна и интеграл се определят както следва:

$$\lim_{t \to t_0} z(t) = \lim_{t \to t_0} x(t) + i \lim_{t \to t_0} y(t),$$

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t),$$

$$\int_a^b z(t)\, dt = \int_a^b x(t)\, dt + i \int_a^b y(t)\, dt.$$

Дефиниция 8. *Нека е зададена комплекснозначна функция $z(t)$, непрекъсната върху интервала $[a, b]$. Когато точката t описва интервала*

$[a,\, b]$, точката $z(t)$ описва някакво множество в комплексната равнина. Това множество, заедно с реда, в който се описват точките му, се нарича **непрекъсната крива**, *а уравнението $z(t)$ -* **параметрично уравнение** *на кривата.*

Две параметрични уравнения

$$z = z(t), \quad a \le t \le b,$$

$$z = z_1(\tau), \quad a_1 \le \tau \le b_1,$$

определят една и съща непрекъсната крива тогава и само тогава, когато съществува непрекъсната и монотонно растяща функция $\varphi(t)$, $a \le t \le b$, такава, че

$$\varphi(a) = a_1, \quad \varphi(b) = b_1, \quad z(t) = z_1(\varphi(t)), \quad a \le t \le b.$$

Ако съществува поне една параметризация $z = z(t)$, $a \le t \le b$, така че $z(t)$ приема различни значения при различни значения на t, то кривата се нарича **проста (жорданова) крива**. *Кривата се нарича* **затворена**, *ако началото ѝ съвпада с края ѝ. Ако съществува $z'(t) \ne 0, \quad a \le t \le b$ и е непрекъсната, кривата се нарича* **гладка**. *Ако съществува разделяне на интервала $[a, b]$ на крайни подинтервали, във всеки от които кривата е гладка, то тя се нарича* **частично гладка**. *Крива с крайна дължина се нарича* **ректифицируема**. *Всяка частично гладка крива е ректифицируема.*

Важно значение има следната

Теорема на Жордан. *Всяка проста, затворена крива Γ разделя равнината на две различни области G_1 и G_2, общата граница на които е Γ. При това една от областите е ограничена (тя се нарича вътрешност на Γ), а другата е неограничена (тя се нарича вънщност на Γ).*

Дефиниция 9. *Едно множество се нарича* **едносвързано**, *ако заедно с всяка затворена жорданова крива, принадлежаща на множеството, съдържа и вътрешността на кривата (т. е. едносвързано е множество без „дупки“).*

Множеството от точките между две концентрични окръжности,

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2,\ r_1,\, r_2 > 0 \right\},$$

е свързано (то е област!), но не е едносвързано. Нарича се **пръстен (венец)**.

Допирателна към крива в комплексната равнина. Нека имаме комплекснозначна, непрекъснато диференцируема функция $z = \gamma(t)$ на реалната променлива t, $\alpha \le t \le \beta$, определяща гладка крива γ в комплексната равнина. Ще покажем, че от условието $\gamma'(t_0) \ne 0$ следва, че в съответната точка $z_0 = \gamma(t_0)$ съществува допирателна към кривата, дефинирана като гранично положение на секущите, минаващи през точката z_0, при което ъгълът между допирателната и реалната ос съвпада с $\arg \gamma'(t_0)$.

Да прекараме през точките $z_0 = \gamma(t_0)$ и $z_1 = \gamma(t_1)$ секущата $\gamma(t_1) - \gamma(t_0)$. Ще отбележим, че посоката на секущата съвпада с тази на вектора $\dfrac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}$, т. е.

$$\arg\left(\gamma(t_1) - \gamma(t_0)\right) = \arg \frac{\gamma(t_1) - \gamma(t_0)}{t_1 - t_0}.$$

Следователно секущата има гранично положение при $t_1 \to t_0$ ($z_1 \to z_0$), ако съществува границата на $\arg \dfrac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0}$ при $t_1 \to t_0$. Но по условие имаме

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \gamma'(t_0) \neq 0.$$

Следователно съществува и границата (вж. например зад. 1.2.3)

$$\lim_{t_1 \to t_0} \arg \frac{z_1 - z_0}{t_1 - t_0} = \arg \gamma'(t_0),$$

което и трябваше да покажем.

Дефиниция 10. Ъгъл между две криви с обща пресечна точка се нарича ориентираният ъгъл между ориентираните допирателни в тази точка.

Задача 1.3.1 *Какво е геометричното място на точки (ГМТ) z в комплексната равнина, за които:*

(а) $\operatorname{Re} z > 0$	**(б)** $\operatorname{Im} z < 1$
(в) $\lvert\operatorname{Im} z\rvert < 1,\ 0 < \operatorname{Re} z < 1$	**(г)** $\lvert z\rvert \leq 1$
(д) $\lvert z - i\rvert > 1$	**(е)** $1 < \lvert z - 1\rvert < 3$
(ж) $0 < \arg z < \dfrac{\pi}{4}$	**(з)** $0 < \lvert\pi - \arg z\rvert < \dfrac{\pi}{4}$

Кои от горните множества са области?

Решение.

(а) Полуравнината отдясно на имагинерната ос.

(б) Полуравнина с контур права, успоредна на реалната ос и минаваща през т. i.

(в) Правоъгълник с върхове $-i,\ 1-i,\ 1+i,\ i$.

(г) Кръг с радиус единица и център в т. 0.

(д) Равнината без кръг с радиус единица и център в т. i.

(е) Пръстенът между окр. с рад. 1 и 3 и общ център в т. 1.

(ж) Ъгъл с големина $\pi/4$ и връх в т. 0, разположен над положителната част на реалната ос, която е едно от рамената му.

(з) Ъгъл с големина $\pi/2$ и връх в т. 0, чиято ъглополовяща е отрицателната част на реалната ос.

Области са всички множества, с изключение на множеството от **(г)** , което е затворено.

Задача 1.3.2 *Какво е геометричното място на точки (ГМТ) z в комплексната равнина, за които:*

(а) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} > 0$	**(б)** $\operatorname{Re}((1+i)z) > 0$
(в) $z = z_1 + z_2,\ \lvert z_1\rvert = 2,\ \lvert z_2\rvert = 1$	**(г)** $\lvert z^2\rvert \leq 2,\ \operatorname{Re}(z^2) \geq 0$

Кои от горните множества са области?

Решение.

$$\textbf{(а)} \qquad \operatorname{Re}\frac{1}{z} > 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re}\frac{\bar{z}}{|z|^2} > 0$$

$$\operatorname{Re}\bar{z} > 0 \;\Leftrightarrow\; \operatorname{Re} z > 0.$$

Това множество е дясната полуравнина и е област.

(б) Нека $z = x + iy$. Имаме, че

$$\operatorname{Re}\left((1+i)z\right) = \operatorname{Re}\left((1+i)(x+iy)\right) = x - y > 0.$$

Това множество е полуравнината с контур ъглополовящата на първи и трети квадрант, съдържаща т. 1. и е област.

(в) От неравенството на триъгълника следва, че

$$1 = |z_2| - |z_1| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2| < 3.$$

Това множество е пръстенът между окръжностите с радиуси 1 и 3 и център в т. 0 и е област.

(г) От $z^2 = x^2 - y^2 + 2xy\, i$ следва, че

$$\operatorname{Re}(z^2) = x^2 - y^2, \; |z^2| = \sqrt{(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2} = x^2 + y^2.$$

От условията $x^2 - y^2 \geq 0$, $x^2 + y^2 \geq 2$ получаваме, че множеството се състои от два симетрични сектора от кръга с център т. 0 и радиус 2, намиращи се съответно в лявата и в дясната полуравнини. Множеството не е област, защото е затворено.

Задача 1.3.3 *Какво е ГМТ z в комплексната равнина, за които:*

(а) $\frac{\pi}{4} < \arg(z+i) < \frac{\pi}{2}$ **(б)** $|1+z| < |1-z|$

(в) $|z-i| + |z+i| < 4$ **(г)** $|z-i| + |z+i| < R$, $R > 0$

(д) $|z-2| - |z+2| < 2$ **(е)** $\arg\dfrac{z+1}{z-1} = \dfrac{\pi}{4}$

Кои от горните множества са области?

Решение. (а) Ъгъл с големина $\pi/4$ и връх в точката $z = -i$, чиито рамене минават през точките $z = 1$ и $z = 0$.

(б) Имаме, че

$$|1+z| < |1-z| \;\Leftrightarrow\; (1+x)^2 + y^2 < (1-x)^2 + y^2 \;\Leftrightarrow\; x > 0.$$

Областта е дясната полуравнина.

(в) Ако $z = x + iy$, то неравенството е еквивалентно на

$$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} < 4$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left[x^2 + (y-1)^2\right] + \left[x^2 + (y+1)^2\right] + 2\sqrt{x^2 + (y-1)^2}\sqrt{x^2 + (y+1)^2} < 16$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sqrt{x^2 + (y-1)^2}\sqrt{x^2 + (y+1)^2} < 7 - x^2 - y^2 \tag{1.1}$$

$$\Longrightarrow \quad (x^2+(y-1)^2)(x^2+(y+1)^2) < (7-x^2-y^2)^2 \tag{1.2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad (x^2+y^2+1-2y)(x^2+y^2+1+2y) < (8-(x^2+y^2+1))^2$$
$$\Longleftrightarrow \quad -4y^2 < 64-16(x^2+y^2+1)$$
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} < 1. \tag{1.3}$$

В посока от (1.3) към (1.2), имаме допълнително

$$\frac{x^2}{3} < 1, \quad \frac{y^2}{4} < 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 < 7,$$

което води до еквивалентност на (1.1) и (1.2).

Задачата може да се реши и по-кратко (но по-малко строго) така: Границата на търсената област удовлетворява равенството

$$|z-i|+|z+i| = 4,$$

което след решаване води до $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4} = 1$, където $z = x+iy$. Сега избираме една вътрешна (или външна) за тази елипса точка (напр. $z = (0,0)$) и проверяваме дали удовлетворява **(а)** (да!). Оттук заключаваме, че търсената област е вътрешността на елипсата.

Геометричното решение на задачата е най-кратко: ГМТ на точки, за които сумата от разстоянията до две фиксирани точки (в случая $\pm i$) е константа, е елипса с фокуси във фиксираните точки. Остава да намерим пресечните точки на елипсата с координатните оси (което е лесно), за да напишем уравнението ѝ.

(г) За $R > 2$ областта е вътрешността на елипса; за $R = 2$ множеството е отсечката $[-i, i]$, която не е област; за $R < 2$ е празното множество.

(д) Аналогично на решението на **(в)** , получаваме, че областта е частта от равнината, лежаща отляво на десния клон на хиперболата $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

(е) Търсим ГМТ z, за които $\arg(z-1) - \arg(z+1) = \pi/4$. Като приложим косинусовата теорема за триъгълника с върхове $z-1$, $z+1$ и 0, получаваме

$$|z+1|^2+|z-1|^2-2|z-1||z+1|\frac{\sqrt{2}}{2} = 4.$$

От последното уравнение последователно получаваме

$$\begin{aligned}
(z+1)(\bar{z}+1)+(z-1)(\bar{z}-1)-\sqrt{2}\,|z-1||z+1| &= 4,\\
2(|z|^2+1)-\sqrt{2}\,|z-1||z+1| &= 4,\\
2(|z|^2-1)-\sqrt{2}\,|z-1||z+1| &= 0,
\end{aligned}$$

откъдето следва, че $|z| \geq 1$ и

$$\begin{aligned}
2(|z|^2-1)^2 &= |z|^4 - z^2 - \bar{z}^2 + 1,\\
|z|^4 - 4|z|^2 + 1 &= -z^2 - \bar{z}^2
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Нека $z = x + i\,y$. Тогава $z^2 = x^2 - y^2 + 2\,i\,x\,y$ и $\bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2\,i\,x\,y$. От (1.4) последователно получаваме

$$\begin{aligned}
(x^2+y^2)^2 - 4(x^2+y^2)+1 &= -2(x^2-y^2),\\
(x^2+y^2-1)^2 &= 2(x^2+y^2)-2(x^2-y^2) = 4y^2,\\
x^2+y^2-1 &= \pm 2y,\\
x^2+(y\mp 1)^2 &= 2.
\end{aligned}$$

Геометричното решение на задачата е следното: Понеже

$$\arg\frac{z+1}{z-1} = \arg(z+1) - \arg(z-1) = \frac{\pi}{4},$$

то точката z описва ГМТ, от които отсечката $[-1,1]$ се вижда под ъгъл $\pi/4$.

Задача 1.3.4 *Нека a и b са комплексни числа. Какво описва точката*

$$z = ta + (1-t)b, \qquad 0 \le t \le 1?$$

Отг. Отсечката $[a,b]$.

Задача 1.3.5 *Кои са кривите със следните параметрични уравнения:*

(а)	$z = Re^{it}, \quad 0 \le t \le \pi$	**(б)**	$z = t + it^2, \quad 0 \le t < \infty$
(в)	$z = 1 + e^{-it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$	**(г)**	$z = e^{2it} - 1, \quad 0 \le t \le 2\pi$
(д)	$z = e^{\pi it} - 1, \quad 0 \le t < 1$	**(е)**	$z = i\cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$

Отг. : **(а)** Горната половина на окръжността $|z| = R,$ описана в посока от R до $-R$.

(б) Дясната половина на параболата $y = x^2,$ описана в посока от 0 до ∞.

(в) Окръжността $|z-1| = 1,$ описана един път в отрицателна посока.

(г) Окръжността $|z+1| = 1,$ описана два пъти в положителна посока.

(д) Дъгата от окръжността $|z+1| = 1,$ която се намира в горната полуравнина и е описана един път в положителна посока.

(е) Отсечката между $z = -i$ и $z = i,$ описана два пъти- първо от $z = i$ до $z = -i$ и после обратно.

Задача 1.3.6 *Нека кривата Γ е зададена с параметричното уравнение $z = z(t),\ 0 \le t \le 1$. Опишете кривите, дефинирани с уравнението $z = z_1(t),\ 0 \le t \le 1$, където:*

$$\textbf{(а)}\quad z_1(t) = z(1-t) \qquad \textbf{(б)}\quad z_1(t) = \begin{cases} z(2t), & 0 \le t < \frac{1}{2}, \\ z(2-2t), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Отг. : **(а)** Кривата $\Gamma,$ описана в обратна посока.

(б) Кривата $\Gamma,$ описана два пъти, първият път в положителна посока, втория път – в обратната посока.

1.4 Безкрайната точка. Сфера на Риман

Комплексната равнина $\mathbb{C}$ не е компакт. Тя се компактифицира, като към нея добавим нова точка $z = \infty$, наричана **безкрайна точка.**

Дефиниция 1. Околност на безкрайната точка *се нарича множество от вида* $\Big\{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| > r\Big\} \bigcup \{\infty\}$*, където* $r > 0$ *е произволно реално число.*

Множеството $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \bigcup \{\infty\}$ *се нарича* **разширена комплексна равнина**. *Всички основни топологични понятия, въведени по-горе за* $\mathbb{C}$*, се пренасят и върху разширената комплексна равнина* $\overline{\mathbb{C}}$.

Нагледно геометрично изображение на $\overline{\mathbb{C}}$ *може да се получи с помощта на* **стереографската проекция**.

Нека в $\mathbb{R}^3$ *построим сфера* S *с център* $(0, 0, \frac{1}{2})$ *и радиус* $\frac{1}{2}$,

$$S = \Big\{(\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \xi^2 + \eta^2 + \Big(\zeta - \frac{1}{2}\Big)^2 = \frac{1}{4}\Big\}.$$

Да отъждествим комплексната равнина $\mathbb{C}$ *равнината* $\zeta = 0$ *в* $\mathbb{R}^3$ *и да съпоставим на всяка точка* $z = x + iy$ *точката* $Z = (\xi, \eta, \zeta)$*, която се получава от пресичането на сферата* S *с лъч, съединяващ* z *със северния полюс* $N = (0, 0, 1)$ *на сферата* S*. За да изразим координатите на точката* Z *чрез* z*, да запишем лъча в параметричен вид*

$$\xi = tx,\ \eta = ty,\ \zeta = 1 - t, \quad t \ge 0.$$

Значението на параметъра t*, което съответства на точката на пресичане на лъча със* S*, се намира от уравненията*

$$t^2(x^2 + y^2) + (\frac{1}{2} - t)^2 = \frac{1}{4} \ \Rightarrow\ t = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Следователно координатите на $Z = (\xi, \eta, \zeta)$ *се получават от формулите*

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2},\ \eta = \frac{y}{1 + |z|^2},\ \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}. \tag{1.1}$$

Обратното изображение се намира от съотношението $t = 1 - \zeta$*, откъдето*

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta},\ y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \tag{1.2}$$

От приведените формули следва, че стереографската проекция $Z \leftrightarrow z$ *осъществява взаимно-еднозначно съответствие между точките на сферата* $S \backslash \big\{N\big\}$ *без северния полюс* N *и комплексната равнина* $\mathbb{C}$*. При това околност на безкрайната точка* $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ *се изобразява в околност на северния полюс* N *на сферата* S*. Тогава, ако продължим стереографската проекция* $S \backslash \big\{N\big\} \leftrightarrow \mathbb{C}$ *до съответствието* $S \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}}$*, съпоставяйки на северния полюс* N *безкрайната точка* $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$*, то полученото изображение е хомеоморфизъм между* S *и* $\overline{\mathbb{C}}$*. Построеният модел на разширената комплексна равнина* $\overline{\mathbb{C}}$ *се нарича* **сфера на Риман**.

Ще разглеждаме правите в $\mathbb{C}$ *като окръжности с безкрайно голям радиус. Основното свойство на стереографската проекция се дава със следната*

Теорема. *При стереографската проекция всяка окръжност в* $\mathbb{C}$ *се изобразява в окръжност от* S *и обратно (окръжност от* S *е всяко сечение на* S *с равнина от* $\mathbb{R}^3$*).*

Доказателство. *Да припомним, че окръжност в* $\mathbb{C}$ *се задава с уравнението*

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad B^2 + C^2 - 4AD > 0, \tag{1.3}$$

което при $A = 0$ *се свежда до права. Замествайки* x *и* y *с формулите* (1.2) *получаваме*

$$B\xi + C\eta + (A - D)\zeta + D = 0, \tag{1.4}$$

т. е. равнина в $\mathbb{R}^3$*, чието разстояние до точката* $(0, 0, \frac{1}{2})$ *е по-малко от* $\frac{1}{2}$ *поради условието в* (1.3). *Следователно сечението на сферата* S *с равнината* (1.4) *е окръжност, лежаща върху* S. *При* $A = 0$ *(случаят на права в* $\mathbb{C}$*) точката* $N(0, 0, 1)$ *лежи на тази окръжност, защото удовлетворява* (1.4). *Това показва, че проекцията на всяка права от* $\mathbb{C}$ *е окръжност, минаваща през* N*, т. е. правите минават през точката* ∞.

Нека отбележим, че и обратното е вярно: при трансформацията (1.1) *образът на всяка окръжност от* S *е окръжност в* $\mathbb{C}$.

Глава 2

Функции на комплексна променлива

2.1 Граници на функции. Непрекъснати функции

Дефиниция 1. *Казваме, че в областта D в комплексната равнина $\mathbb{C}$ е зададена* **комплекснозначна функция**, *ако на всяка точка $z \in D$ е съпоставено комплексно число $w = f(z)$.*

Множеството от значения на $f(z)$ ще означаваме с $G := f(D)$. Ще отбележим, че при така въведеното определение на комплексна функция (ако не е специално указано), дефиниционното множество е област, при това $f(z)$ е еднозначна функция, т.е. на всяко $z \in D$ е съпоставено единствено значение w. При функциите на комплексна променлива естествено възниква и понятието многозначна функция, т.е. когато на едно z съответстват няколко значения на w.

Така например функциите $w = z^n,\ n \in \mathbb{N}$, $w = |z|$, $w = \bar{z}$, $w = \mathrm{Re} z$, $w = \mathrm{Im}\, z$ представляват еднозначни функции, дефинирани в комплексната равнина $\mathbb{C}$; функцията $\sqrt[n]{z}$ е многозначна (n-значна), дефинирана също в цялата комплексна равнина; $w = \mathrm{Arg}\, z$ е многозначна функция (безкрайнозначна), дефинирана за всички $z \neq 0$.

Ако не е специално указано, ние ще разглеждаме еднозначни функции. Нека $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тогава дефинирането на функцията $w = f(z)$ е еквивалентно на дефинирането на две реалнозначни функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$

$$u(x,y) = \mathrm{Re}\, f(x+iy), \quad v(x,y) = \mathrm{Im}\, f(x+iy)$$

на реалните променливи x и y.

Дефиниция 2. *Числото A наричаме* **граница** *на функцията $f(z)$ в точката z_0 (z_0 е гранична точка на дефиниционната област D), ако за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такова че за всички $z \in D$, удовлетворяващи неравенството $0 < |z - z_0| < \delta$, е изпълнено $|f(z) - A| < \varepsilon$. Записваме*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A.$$

Нека $A = B + iC,\ z_0 = x_0 + iy_0,\ f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогава последното равенство е еквивалентно на равенствата

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x,y) = B, \qquad \lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x,y) = C.$$

Аналогично, ако $z_0 = \infty$, числото A наричаме граница на функцията $f(z)$ при $z \to \infty$ (∞ е гранична точка на дефиниционната област D), ако за всяко число $\varepsilon > 0$ съществува число $N = N(\varepsilon) > 0$ така, че за всички $z \in D$, удовлетворяващи неравенството $|z| > N$ имаме $|f(z) - A| < \varepsilon$. Записваме

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = A.$$

Накрая, ще казваме, че точката ∞ *е граница на функцията* $f(z)$ *при* $z \to \infty$ *, ако за всяко число* $M > 0$ *съществува число* $N = N(M) > 0$ *така, че за всички* $|z| > M$ *имаме* $|f(z)| > M$*. Записваме*

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \infty.$$

Дефиницията на непрекъсната функция въвеждаме по аналогия с реалния анализ.

Дефиниция 3. *Казваме, че функцията* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *е непрекъсната в точката* $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$*, ако*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0),$$

което е еквивалентно на условията реалните функции $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *да бъдат непрекъснати в точката* (x_0, y_0)*,т.,е.*

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} u(x, y) = u(x_0, v_0), \quad \lim_{x \to x_0, y \to y_0} v(x, y) = v(x_0, y_0).$$

Функцията $f(z)$ *е непрекъсната в областта* D*, ако е непрекъсната във всяка точка* $z \in D$*. Ще отбележим, че от последното равенство следва, че функция на комплексна променлива* $f(z)$ *е непрекъсната тогава и само тогава, когато реалната и имагинерната ѝ части , разглеждани като функции на реалните променливи* x *и* y*, са непрекъснати. От тук следва, че редица свойства на непрекъснати функции на две реални променливи непосредствено се пренасят за функции на комплексна променлива. По–точно, сума, разлика, произведение и частно на две непрекъснати функции са непрекъснати (в случая на частно се изключват точките, в които знаменателят се анулира).*

Ако функцията $w = f(z)$ *е непрекъсната в областта* D*, а функцията* $\zeta = \varphi(w)$ *е непрекъсната в областта* $G = f(D)$*, тогава* **сложната функция** $\zeta = \varphi(f(z)) = F(z)$ *също е непрекъсната в* D*.*

2.2 Аналитични функции. Условия на Коши-Риман

Нека функцията $f(z)$ *е дефинирана в област* $G \subset \mathbb{C}$ *и нека точките* z *и* $z + \Delta z$ *принадлежат на* G*.*

Дефиниция 1. *Функцията* $f(z)$ *се нарича* **диференцируема** *в точката* z*, ако частното* $\dfrac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ *има крайна граница при* Δz*, клонящо към нула по произволен начин. Тази граница се нарича* **производна** *на функцията* $f(z)$ *в точката* z *и се означава с*

$$\frac{df}{dz}(z) \equiv f'(z) := \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Ако $z = x + iy$ *и* $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$*, то във всяка точка, в която функцията* $f(z)$ *е диференцируема, са изпълнени следните* **условия на Коши-Риман**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Обратно, ако в някоя точка (x, y) *функциите* $u(x, y)$ *и* $v(x, y)$ *са диференцируеми като функции на реалните променливи* x *и* y *и са изпълнени* *условията на Коши-Риман, то функцията $f = u + iv$ е диференцируема като функция на комплексната променлива z в точката $z = x + iy$.*

Дефиниция 2. *Функцията $f(z)$ се нарича* **аналитична (холоморфна)** *в точката $z \in D$, ако е диференцируема както в самата точка z, така и в някоя нейна околност. Функцията $f(z)$ се нарича аналитична в областта D, ако е диференцируема във всяка точка от тази област.*

За всяка аналитична функция $f(z)$ имаме

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

и

$$|f'(z)|^2 = u_x'^2 + u_y'^2 = u_x'^2 + v_x'^2 = u_y'^2 + v_y'^2 = v_x'^2 + v_y'^2.$$

Задача 2.2.1 *Кои от следните функции са аналитични:*

(а) z **(б)** z^2 **(в)** $|z|$ **(г)** $\bar{z}$?

Решение. (а) Имаме, че $u(x, y) = x$, $v(x, y) = y$, откъдето получаваме

$$u_x' = 1 = v_y',$$
$$u_y' = 0 = -v_x'.$$

Следователно функцията z е аналитична.

(б) Тъй като $z^2 = x^2 - y^2 + i.2xy$, то $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$. Имаме, че

$$u_x' = 2x = v_y',$$
$$u_y' = -2y = -v_x'.$$

Следователно функцията z е аналитична.

(в) Тъй като $u(x, y) = x^2 + y^2$, $v(x, y) = 0$, имаме, че $u_x' = 2x \neq v_y' = 0$. Следователно функцията $\bar{z}$ не е аналитична.

(г) Тъй като $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$, имаме, че $u_x' = 1 \neq v_y' = -1$. Следователно функцията $\bar{z}$ не е аналитична.

Задача 2.2.2 *Докажете, че функцията $f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$ не е аналитична в никоя точка.*

Решение. Тъй като $u(x, y) = x^2 + y$ и $v(x, y) = y^2 - x$, имаме, че

$$u_x' = 2x, \qquad v_y' = 2y,$$
$$u_y' = 1, \qquad v_x' = -1.$$

Уравненията на Коши-Риман са удовлетворени едновременно само върху правата $x = y$, т. е. в никоя околност на точка в равнината. Следователно функцията $f(z) = (x^2 + y) + i(y^2 - x)$ не е аналитична в никоя точка.

Задача 2.2.3 *Нека $f(z)$ е аналитична функция, която не е константа и нека $g(z) = f(\bar{z})$. Докажете, че g не е аналитична.*

Упътване. Ако $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, то
$$f(\bar{z}) = f(x - iy) = u(x, -y) + i\,v(x, -y).$$
Проверете условията на Коши-Риман за $g(z)$.

Задача 2.2.4 *Нека $f(z)$ е аналитична функция и нека $g(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Докажете, че g е аналитична.*

Упътване. Ако $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i\,v(x, y)$, то
$$g(z) = \overline{f(x - iy)} = u(x, -y) - i\,v(x, -y).$$
Проверете условията на Коши-Риман за $g(z)$.

Тъй като
$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i},$$
всяка функция $f(z)$ може да се разглежда като функция само на z и $\bar{z}$, т. е.
$$f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y) = f(z, \bar{z}).$$
По-долу $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ означава частната производна на $f(z, \bar{z})$ относно $\bar{z}$. Едно важно свойство на аналитичните функции, което ще докажем в следващата задача е, че функцията $f(z, \bar{z})$ е аналитична тогава и само тогава, когато зависи само от z и не зависи от $\bar{z}$, т. е. $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Задача 2.2.5 *Да се докаже, че условията на Коши-Риман са еквивалентни на условието*
$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0. \tag{2.1}$$

Решение. Нека във $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ направим смяна на променливите
$$\xi = x + i\,y = z, \quad \eta = x - i\,y = \bar{z},$$
т. е.
$$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad y = \frac{1}{2i}(\xi - \eta),$$
получавайки функцията $f(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$. Диференцирайки относно η, получаваме
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2}\frac{\partial f}{\partial y} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\Big) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right).
\end{aligned}$$
Следователно $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ тогава и само тогава, когато са изпълнени условията на Коши-Риман.

Задача 2.2.6 *Нека $f(z) = u(x, y) + i\,v(x, y)$ е аналитична функция в областта D и нека $u(x, y) = F(v(x, y))$, където функцията $F(t)$ е строго монотонна и непрекъснато диференцируема върху цялата реална ос. Да се докаже, че $f(z) = \mathrm{Const}$.*

Решение. Тъй като $u'_x = F'v'_x, \quad u'_y = F'v'_y$, имаме, че

$$|f'(z)|^2 = u_x^{'2} + u_y^{'2} = v_x^{'2} + v_y^{'2} = F'^2(v_x^{'2} + v_y^{'2}).$$

Понеже $F' \neq 0$, то $v_x^{'2} + v_y^{'2} = 0$. Следователно $v'_x = u'_y = 0$. От условията на Коши – Риман следва, че $v'_y = u'_x = 0$ или $f(z) = \mathrm{Const}$.

В следващата задача ще дефинираме функцията e^z, $z \in \mathbb{C}$. Ще припомним, че в задача 1.2.6 вече дефинирахме тази функция като границата на редицата с общ член $(1 + \frac{z}{n})^n$. Тук даваме друга еквивалентна дефиниция на e^z - като решение на диференциално уравнение.

Задача 2.2.7 ♠ *Да се докаже, че решението на диференциалното уравнение*

$$\frac{df}{dz} = f(z), \;\; f(0) = 1$$

е функцията $f(z) = e^z$.

Решение. Нека $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Тогава

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = u + iv, \quad f(0) = u(0, 0) + iv(0, 0) = 1.$$

Следователно $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = u, \quad \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = v, \quad u(0, 0) = 1, v(0, 0) = 0$. Получихме две диференциални уравнения с разделящи се променливи. Решението на уравнението

$$\partial u/\partial x = u, \;\; u(0, 0) = 1 \text{ е } u(x, y) = e^x\lambda(y), \; \lambda(0) = 1.$$

Решението на уравнението

$$\partial v/\partial x = v, \;\; v(0, 0) = 0 \text{ е } v(x, y) = e^x\mu(y), \; \mu(0) = 0.$$

Тогава

$$\partial v/\partial y = \mu'(y)e^x = \lambda(y)e^x, \quad -\partial u/\partial y = -\lambda'(y)e^x = \mu(y)e^x,$$

откъдето получаваме $\mu'(y) = \lambda(y)$, $\lambda'(y) = -\mu(y)$. Следователно функциите $\lambda(y)$, $\mu(y)$ са решения на уравнението

$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} + \varphi = 0,$$

общото решение на което е $\varphi(y) = C_1 \cos y + C_2 \sin y$. От началните условия получаваме $\lambda(y) = \cos y + A_1 \sin y$, $\mu(y) = B_1 \sin y$. По-нататък, от

$$\lambda'(y) = -\sin y + A_1 \cos y = -\mu(y) = -B_1 \sin y$$

получаваме $A_1 = 0, \; B_1 = 1$. Следователно $\lambda(y) = \cos y$, $\mu(y) = \sin y$ или $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$. Тогава

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x e^{i\,y} = e^z.$$

Ако за една аналитична функция $f = u + iv$ е известна реалната (или имагинерната) ѝ част, т. е. функцията u (или v), то f може да бъде определена с точност до константа като се използват условията на Коши-Риман.

Задача 2.2.8 *Намерете аналитична функция $f = u + iv$, за която*

(а) $u(x,y) = 2x(1-y)$,

(б) $u(x,y) = \operatorname{sh} x \sin y$,

(в) $v(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2}, \quad f(2) = 0$,

(г) $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y), \quad f(0) = 0$,

(д) $v(x,y) = \dfrac{2\sin 2x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x},\ z \neq 0.$

Решение. **(а)** От условията на Коши-Риман получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2(1-y) = \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Следователно $v(x,y) = \displaystyle\int 2(1-y)\,dy = 2y - y^2 + \varphi(x)$. По-нататък имаме, че $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -2x = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -\varphi'(x)$, откъдето следва $\varphi'(x) = 2x$ или $\varphi(x) = x^2 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Тогава

$$f(z) = 2x(1-y) + i(x^2 - y^2 + 2y) + iC = iz^2 + 2z + iC.$$

(б) От условията на Коши-Риман получаваме $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \operatorname{ch} x \sin y = \dfrac{\partial v}{\partial y}$. Следователно $v(x,y) = -\operatorname{ch} x \cos y + \varphi(x)$. По-нататък получаваме

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \operatorname{sh} x \cos y = -\frac{\partial v}{\partial x} = \operatorname{sh} x \cos y - \varphi'(x).$$

Следователно $\varphi'(x) = 0$ или $\varphi(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Получихме, че

$$v(x,y) = -\operatorname{ch} x \cos y + C$$

или

$$f(z) = \operatorname{sh} x \sin y - i\operatorname{ch} x \cos y + i\,C = -i\operatorname{ch} z + i\,C$$

(За дефиницията на $\operatorname{ch} z,\ z \in \mathbb{C}$, вж. Глава 2, Елементарни трансцендентни функции).

(в) От условията на Коши-Риман получаваме

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial y}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{2.3}$$

От (2.2) след интегриране по y получаваме, че

$$u(x,y) = \frac{-x}{x^2+y^2} + \varphi(x),$$

от което след диференциране по x и като използваме (2.3), следва, че $\varphi'(x) = 0$. Следователно

$$f(z) = -\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{y}{x^2+y^2} + C = -\frac{x-iy}{x^2+y^2} + C = -\frac{1}{z} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Накрая от условието $f(2) = 0$ получаваме

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}.$$

Отг. **(г)** $f(z) = ze^z$ **(д)** $f(z) = \operatorname{cotg} z + C,\ C \in \mathbb{R}$

Задача 2.2.9 *Нека* $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ *(полярни координати) и нека*

$$f(z) = P(r, \varphi) + iQ(r, \varphi),$$

където $P(r, \varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $Q(r, \varphi) = v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. *Да се докаже, че* **условията на Коши-Риман в полярни координати** *се записват във вида*

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \varphi}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \varphi}. \tag{2.4}$$

Решение. Диференцирайки по r и φ, получаваме

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi, \\ \frac{\partial Q}{\partial \varphi} &= -r\frac{\partial v}{\partial x}\sin\varphi + r\frac{\partial v}{\partial y}\cos\varphi = r\frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi + r\frac{\partial u}{\partial y}\sin\varphi = r\frac{\partial P}{\partial r}, \end{aligned}$$

като в предпоследното равенство използвахме условията на Коши-Риман. Второто условие в (2.4) се получава по аналогичен начин.

Задача 2.2.10 *Като използвате условията* (2.4)*, намерете аналитична функция* $f = P + iQ$*, за която*

$$P = r\varphi\cos\varphi + r\ln r\sin\varphi, \quad z = x + iy = re^{i\varphi}.$$

Решение. От първото условие в (2.4) получаваме

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \varphi\cos\varphi + \ln r\sin\varphi + \sin\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial \varphi}.$$

Като интегрираме последното равенство относно φ, получаваме

$$\frac{1}{r}\,Q = \int(\varphi\cos\varphi + \ln r\sin\varphi + \sin\varphi)\,d\varphi = \varphi\sin\varphi - \ln r\cos\varphi + c(r),$$

т. е.

$$Q = r\varphi\sin\varphi - r\ln r\cos\varphi + C(r), \quad C(r) = rc(r).$$

За да намерим неизвестната функция $C(r)$ използваме второто условие в (2.4), от което следва, че $C'(r) = 0 \Rightarrow C = \mathrm{Const}$.

Задача 2.2.11 ♠ *Нека* $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ *е дефинирана в област* G*, частните ѝ производни* $f'_x(z)$ *и* $f'_y(z)$ *съществуват и са непрекъснати и* $P'^2_y + Q'^2_y \neq 0$*. Докажете,че ако* $f(z)$ *трансформира кривите, които се пресичат под прав ъгъл, в също такива криви, то или* $f(z)$*, или* $\bar{f}(z)$ *е аналитична в* G*.*

Решение. Нека $z_0 \in G$. Да разгледаме взаимно перпендикулярните лъчи

$$l_1 : z = z_0 + te^{i\varphi}, \quad l_2 : z = z_0 + ite^{i\varphi}, \quad \varphi = Const., \; t \geq 0.$$

Техните образи са кривите

$$L_1 : w_1(t) = f(z_0 + te^{i\varphi}), \quad L_2 : w_2(t) = f(z_0 + ite^{i\varphi}).$$

Векторите

$$\begin{aligned} w_1'(0) = \quad & P_x'(x_0,y_0)\cos\varphi + P_y'(x_0,y_0)\sin\varphi \\ & +i(Q_x'(x_0,y_0)\cos\varphi + Q_y'(x_0,y_0)\sin\varphi), \\ w_2'(0) = \quad & -P_x'(x_0,y_0)\sin\varphi + P_y'(x_0,y_0)\cos\varphi \\ & +i(-Q_x'(x_0,y_0)\sin\varphi + Q_y'(x_0,y_0)\cos\varphi) \end{aligned}$$

лежат върху допирателните към L_1 и L_2 в пресечната точка $f(z_0)$ и следователно са ортогонални. Като пресметнем тяхното скаларно произведение, получаваме

$$\begin{aligned} & (P_y'^2 + Q_y'^2 - P_x'^2 - Q_x'^2)\sin\varphi\cos\varphi - (P_x'P_y' + Q_x'Q_y')\sin^2\varphi \\ & +(P_x'P_y' + Q_x'Q_y')\cos^2\varphi = 0, \end{aligned}$$

откъдето при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/4$ съответно получаваме

$$P_x'P_y' + Q_x'Q_y' = 0, \quad P_x'^2 + Q_x'^2 = P_y'^2 + Q_y'^2. \tag{2.5}$$

Нека $Q_x' = -\lambda(x,y)P_y'$. Тогава от първото уравнение в (2.5) следва, че

$$P_x' = \lambda(x,y)Q_y'.$$

След заместване във второто уравнение в (2.5) получаваме

$$(\lambda^2 - 1)(Q_y'^2 + P_y'^2) = 0.$$

Тъй като $Q_y'^2 + P_y'^2 \neq 0$, то $\lambda^2 = 1$, т. е. $\lambda = \pm 1$. Функцията $\lambda(x,y)$ е непрекъсната (защото $Q_y'^2 + P_y'^2 \neq 0$), следователно или $\lambda \equiv 1$ и тогава $f(z)$ е аналитична, или $\lambda \equiv -1$ и тогава $\bar{f}(z)$ е аналитична.

2.3 Хармонични функции

Дефиниция. *Реалнозначната функция $\varphi(x,y)$ се нарича* **хармонична** *в областта $G \subset \mathbb{C}$, ако има непрекъснати частни производни до втори ред включително и удовлетворява уравнението на Лаплас*

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Ако функцията $f(z) = u + iv$ е аналитична в областта G, то от уравненията на Коши-Риман следва, че реалната ѝ част $u(x,y)$ и имагинерната ѝ част $v(x,y)$ са хармонични функции в тази област.

Обратно, нека $u(x,y)$ и $v(x,y)$ са две хармонични функции, които удовлетворяват условията на Коши - Риман.[1] *Тогава функцията $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ е аналитична.*

Задача 2.3.1 *Нека $u(x,y) = y^3 + \alpha x^2 y$. Намерете при кои реални стойности на α функцията $u(x,y)$ е хармонична и в този случай намерете спрегнатата ѝ функция $v(x,y)$.*

[1] Такава двойка функции се нарича **спрегната двойка хармонични функции**.

Решение. Тъй като $u(x,y)$ е хармонична функция, то тя удовлетворява уравнението

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 2\alpha y + 6y = 0,$$

откъдето следва, че $\alpha = -3$ и $u(x,y) = y^3 - 3x^2y$. Сега от условията на Коши-Риман получаваме

$$u'_x = -6xy = v'_y,$$

$$u'_y = 3y^2 - 3x^2 = -v'_x.$$

От първото уравнение получаваме

$$v(x,y) = -3xy^2 + C(x),$$

а от второто-

$$3y^2 - 3x^2 = 3y^2 - C'(x).$$

Следователно $C(x) = x^3 + C$, $C \in \mathbb{R}$. Тогава

$$v(x,y) = x^3 - 3xy^2 + C.$$

Задача 2.3.2 *Нека $f(z)$ е аналитична функция. Нека $g(x,y) = |f(x+iy)|^4$. Ако вторите производни на $\operatorname{Re} f$ и $\operatorname{Im} f$ са непрекъснати, докажете, че*

$$g''_{xx} + g''_{yy} = 16|f(x+iy)|^2|f'(x+iy)|^2.$$

Решение. Нека $f = u + iv$. Тогава $g = |u+iv|^4 = (u^2+v^2)^2$, откъдето получаваме

$$\begin{aligned} g'_x &= 2(u^2+v^2)(2uu'_x + 2vv'_x) \\ g''_{xx} &= 8(uu'_x + vv'_x)^2 + 4(u^2+v^2)((u'_x)^2 + uu''_{xx} + (v'_x)^2 + vv''_{xx}). \end{aligned}$$

Аналогично получаваме

$$g''_{yy} = 8(uu'_y + vv'_y)^2 + 4(u^2+v^2)((u'_y)^2 + uu''_{yy} + (v'_y)^2 + vv''_{yy}).$$

От условията на Коши-Риман и от факта, че функциите u и v са хармонични, получаваме

$$g''_{yy} = 8(-uv'_x + vu'_x)^2 + 4(u^2+v^2)((v'_x)^2 - uu''_{xx} + (u'_x)^2 - vv''_{xx}).$$

Тогава

$$\begin{aligned} g''_{xx} + g''_{yy} &= 8(u^2+v^2)((u'_x)^2 + (v'_x)^2) + 4(u^2+v^2)(2(u'_x)^2 + 2(v'_x)^2) \\ &= 16(u^2+v^2)((u'_x)^2 + (v'_x)^2) \\ &= 16|f|^2|f'|^2. \end{aligned}$$

Задача 2.3.3 ♠ *Намерете всички хармонични функции от вида*

$$\textbf{(а)}\ u(x,y) = \varphi\left(\tfrac{y}{x}\right), \quad \textbf{(б)}\ u(x,y) = \varphi\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Намерете спрегнатата функция $v(x,y)$ и съответната аналитична функция $f(z) = u + iv$.

Решение. (а) Нека $t = y/x$. Имаме, че

$$\begin{aligned} u'_x &= \varphi'(t)t'_x,\ u'_y = \varphi'(t)t'_y, \\ u''_{xx} &= \varphi''(t)(t'_x)^2 + \varphi'(t)t''_{xx}, \\ u''_{yy} &= \varphi''(t)(t'_y)^2 + \varphi'(t)t''_{yy}. \end{aligned}$$

Следователно

$$u''_{xx} + u''_{yy} = \varphi''(t)[(t'_x)^2 + (t'_y)^2] + \varphi'(t)[t''_{xx} + t''_{yy}] = 0.$$

Тъй като $(t'_x)^2 + (t'_y)^2 = \dfrac{y^2 + x^2}{x^4}$ и $t''_{xx} + t''_{yy} = \dfrac{2y}{x^3}$, то

$$\varphi''(t)(1 + t^2) + \varphi'(t)2t = 0.$$

Полученото диференциално уравнение интегрираме чрез разделяне на променливите

$$\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)} = -\frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow \ln\varphi'(t) = \ln\frac{C_1}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \varphi'(t) = \frac{C_1}{1+t^2} \Rightarrow \varphi(t) = C_1 \mathrm{arctg}\, t + C_2,$$

където C_1 и C_2 са реални константи. Окончателно получаваме

$$u(x, y) = C_1 \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + C_2.$$

Сега ще намерим спрегнатата функция $v(x, y)$. От уравненията на Коши - Риман следва, че

$$u'_x = \frac{-C_1 y}{x^2 + y^2} = v'_y, \qquad u'_y = \frac{C_1 x}{x^2 + y^2} = -v'_x.$$

След интегриране на първото уравнение относно y намираме $v(x, y) = -\dfrac{C_1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C(x)$. Тогава $v'_x = \dfrac{-C_1 x}{x^2 + y^2} + C'(x)$ и от второто уравнение следва, че $C'(x) = 0$. Получихме, че

$$v(x, y) = -\frac{C_1}{2}\ln(x^2 + y^2) + C_3,\ \text{където } C_3 \in \mathbb{R}.$$

Накрая получаваме

$$\begin{aligned} f(z) &= C_1 \,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} + C_2 - C_1\, i\, \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C_3\, i \\ &= -C_1\, i\, \mathrm{Log}\, z + C_2 + C_3\, i \end{aligned}$$

(За дефиницията на функцията $\mathrm{Log}\, z,\ z \in \mathbb{C}$, вж. Глава 2, Елементарни трансцендентни функции).

(б) Нека $t = x + \sqrt{x^2 + y^2}$. Аналогично на случай **(а)** получаваме

$$u''_{xx} + u''_{yy} = \varphi''(t)[(t'_x)^2 + (t'_y)^2] + \varphi'(t)[t''_{xx} + t''_{yy}] = 0. \tag{2.1}$$

Тъй като $t'_x = \dfrac{t}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ и $t'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, то

$$(t'_x)^2 + (t'_y)^2 = \frac{2t}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad t''_{xx} + t''_{yy} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{2.2}$$

Като заместим формулите от (2.2) в (2.1), получаваме диференциалното уравнение

$$2t\,\varphi'' + \varphi' = 0,$$

което решаваме по следния начин

$$\frac{\varphi''}{\varphi'} = -\frac{1}{2t} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi' = Ct^{-\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = C_1\sqrt{t} + C_2,$$

където $C_1 = 2C$, C, $C_2 \in \mathbb{R}$. Сега ще намерим спрегнатата функция $v(x, y)$. От условията на Коши-Риман получаваме

$$u'_y = \varphi' t'_y = \frac{C_1 y}{2\sqrt{t}\sqrt{x^2+y^2}} = -v'_x,$$

откъдето след интегриране получаваме

$$\begin{aligned} v(x,y) &= -\frac{C_1 y}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}} = C_1 y \int d\frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x^2+y^2}}} \\ &= \frac{C_1 y}{\sqrt{t}} + C_3(y). \end{aligned}$$

Последователно получаваме

$$v'_y = C_1\frac{\sqrt{t} - \frac{y}{2\sqrt{t}}t'_y}{t} + C'_3(y) = u'_x = \frac{C_1}{2\sqrt{t}}\frac{t}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$C_1\frac{\sqrt{t}}{2\sqrt{x^2+y^2}} - C_1\frac{2t\sqrt{x^2+y^2} - y^2}{2t^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} = C'_3(y),$$

$$C_1\frac{(t-\sqrt{x^2+y^2})^2 - x^2}{2t^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} = C'_3(y) \ \Rightarrow\ C'_3(y) = 0 \ \Rightarrow\ v(x,y) = \frac{C_1 y}{\sqrt{t}} + C_3.$$

Тогава

$$f(z) = C_1\sqrt{t} + C_2 + C_1\frac{yi}{\sqrt{t}} + C_3 i = C_1\frac{t+yi}{\sqrt{t}} + C_3 i + C_2.$$

Остана да изключим t от горната формула.

$$\begin{aligned} \left(\frac{t+yi}{\sqrt{t}}\right)^2 &= \frac{t^2 + 2yti - y^2}{t} = \frac{t^2 - y^2}{t} + 2yi \\ &= \frac{2x^2 + 2x\sqrt{x^2+y^2}}{t} + 2yi = 2x + 2yi = 2z. \end{aligned}$$

Окончателно получаваме

$$f(z) = C_4\sqrt{z} + C_3 i + C_2, \ \text{където } C_4 = \sqrt{2}C_1.$$

2.4 Цяла линейна функция $w = az + b$

Дефиниция 1. Цяла линейна функция *се нарича функцията* $w = az + b$, *където* a, $b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Цялата линейна функция изобразява комплексната равнина в себе си. Изображението $w = az + b$ *може да се разглежда като последователно прилагане на* **хомотетия** *с коефициент* $|a|$, **ротация** *на ъгъл* $\arg a$ *и* **транслация**, *определена от вектора* b.

Цялата линейна трансформация има най-много две неподвижни точки[2] : $z_1 = \infty$ *и* $z_2 = b/(1-a)$. Функцията $w = f(z)$ може да се запише във вида $w - z_2 = a(z - z_2)$.

Задача 2.4.1 *Докажете, че линейното изображение* $w = az + b$ *е еднозначно определено, ако знаем две различни точки* z_1 *и* z_2 *заедно с образите им* w_1 *и* w_2.

Решение. Линейното изображение $w = az + b$ е еднозначно определено, ако коефициентите a и b са еднозначно определени. За да ги намерим, решаваме системата уравнения

$$w_1 = az_1 + b$$
$$w_2 = az_2 + b$$

относно неизвестните a и b. Тъй като $z_1 \neq z_2$, системата има единствено решение

$$a = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2}, \qquad b = \frac{w_1 z_2 - w_2 z_1}{z_2 - z_1}.$$

Задача 2.4.2 *Какъв е геометричният смисъл на следните преобразования?*

(а) $w = z + 3i$ **(б)** $w = z + 5$ **(в)** $w = iz$

(г) $w = e^{i\frac{\pi}{6}} z$ **(д)** $w = 3z$ **(е)** $w = \frac{1-i}{\sqrt{2}} z$

. **(а)** Транслация с 3 единици нагоре.

(б) Транслация с 5 единици надясно.

(в) Ротация на ъгъл $\pi/2$.

(г) Ротация на ъгъл $\pi/6$.

(д) Хомотетия с коефициент 3.

(е) Ротация на ъгъл $-\pi/4$.

Задача 2.4.3 *Намерете неподвижните точки на трансформациите*

$$\textbf{(а)}\ w = 3z + 5i, \quad \textbf{(б)}\ w = \frac{i}{2}(z + 3)$$

и ъгъла, на който всяка от тях завърта комплексната равнина около съответната точка.

Решение. (а) Неподвижната точка е решението на уравнението $z = 3z + 5i$, т. е. $z = -5i/2$. Следователно w може да се запише във вида

$$w + \frac{5}{2}i = 3(z + \frac{5}{2}i).$$

В случая нямаме ротация, понеже $\arg a = \arg 3 = 0$.

Отг. (б) $w - \dfrac{3i}{2-i} = \dfrac{i}{2}(z - \dfrac{3i}{2-i}), \ \arg a = \dfrac{\pi}{2}.$

[2]Точката z_0 е неподвижна (двойна) точка за изображението $w = f(z)$, ако $z_0 = f(z_0)$.

Задача 2.4.4 *Намерете цяла линейна трансформация, която преобразува върховете z_1 и z_2 на триъгълника с върхове z_1, z_2, z_3 в средите на срещуположните страни. Определете неподвижната точка, образа на z_3 и ъгъла, на който се завърта комплексната равнина.*

Решение. Иска се $z_1 \to (z_2 + z_3)/2$, $z_2 \to (z_1 + z_3)/2$, затова решаваме системата

$$(z_2 + z_3)/2 = az_1 + b$$
$$(z_1 + z_3)/2 = az_2 + b$$

и намираме $a = -1/2$, $b = (z_1 + z_2 + z_3)/2$, т.е.

$$w = -\frac{z}{2} + \frac{z_1 + z_2 + z_3}{2}.$$

Ротацията е на ъгъл $\arg(-1/2) = \pi$ и $w(z_3) = \dfrac{z_1 + z_2}{2}$.

Задача 2.4.5 *Намерете общият вид на линейните функции, които преобразуват*

(а) *горната полуравнина в себе си,*
(б) *горната полуравнина в долната полуравнина,*
(в) *горната полуравнина в дясната полуравнина.*

Решение. (а) Ротацията може да бъде само на ъгъл $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, защото реалната ос трябва да се трансформира в себе си, при това така, че горната полуравнина да не отиде в долната. Това ограничава възможните линейни функции до $w = az + b$ $(a > 0)$. Всички те, обаче, предизвикват транслация (определена от вектора b) на горната полуравнина и нейния контур (реалната права). Така че $\operatorname{Im} b = 0$ е необходимо и достатъчно условие горната полуравнина да остане в себе си. Крайният резултат е: $w = az + b$, a, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

(б) Една от търсените трансформации е $\tau_0 : w = -z$. Ако $\tau : w = pz + q$ е произволно решение на нашата задача, то $\tau_0^{-1}\tau : w = -(pz + q)$ е решение на **(а)** , т. е. изпълнено е, че $-p > 0$, $-q \in \mathbb{R}$. С други думи, получаваме $w = -az + b$, $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Това е и окончателният отговор, защото тези трансформации наистина изпращат горната полуравнина в долната.

Отг. (в) $w = -i(az + b)$, където a, $b \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

Задача 2.4.6 *Намерете линейна функция $w = az + b$, изобразяваща ивицата $a < Re\, z < a + h$, a, $h \in \mathbb{R}$, в ивицата $0 < w < 1$.*

Решение. Тъй като ивица с ширина h се изобразява в ивица с ширина 1, то съответната хомотетия трябва да е с коефициент $1/h$. Двете ивици са вертикални, затова ъгълът на ротация е 0 или π (избираме 0). При ротация на ъгъл 0 трябва лявата граница $x = a$ да отиде в лявата граница $u = 0$ на образа (чрез транслация $w = z - a$). Окончателно намираме $w = (z - a)/h$ и после непосредствено проверяваме, че това изображение извършва исканото действие.

Задача 2.4.7 *Докажете, че*

(а) *цялата линейна трансформация запазва простото отношение на всеки три точки.*

(б) *ако трансформацията $w = f(z)$ запазва простото отношение на точките, то тя е цяла линейна.*

Решение. а) Ако $w_k = az_k + b$ $(k = 1, 2, 3)$ са образите на три произволни точки z_1, z_2, z_3, то

$$(w_1, w_2, w_3) = \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{(az_3 + b) - (az_1 + b)}{(az_3 + b) - (az_2 + b)} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = (z_1, z_2, z_3).$$

б) В сила е

$$(f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = \frac{f(z_3) - f(z_1)}{f(z_3) - f(z_2)} = \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} = (z_1, z_2, z_3)$$

за всеки три различни точки z_1, z_2, z_3. Фиксираме z_2 и z_3 и оставяме $z_1 = z \in \mathbb{C}$ произволно. Решаваме горното равенство относно $f(z)$ и получаваме $f(z) = f(z_3) - \frac{f(z_3)-f(z_2)}{z_3-z_2}(z_3 - z)$, което представлява цяла линейна трнсформация относно z.

Задача 2.4.8 *Докажете, че ако една цяла линейна трансформация преобразува дадена окръжност K с център z_0 и радиус R в друга окръжност K_1 с център w_0 и радиус R_1, то тя преобразува z_0 в w_0. Намерете общия вид на тази трансформация.*

Решение. Тъй като всяка цяла линейна трансформация е суперпозиция на ротация, транслация (запазващи разстоянието между точките) и хомотетия (умножаваща разстоянието между точките с едно и също число), то равните разстояния между z_0 и точките от K водят до равни разстояния между образа на z_0 и точките от K_1. Това означава, че образът на z_0 трябва да съвпада с центъра w_0 на K_1.

Ако τ е цяла линейна трансформация, изпращаща K в K_1, тя задължително изпраща z_0 в w_0 (както току-що видяхме) и коефициентът на съответната ѝ хомотетия е равен на отношението на радиусите R_1/R (защото радиус на K отива в радиус на K_1), т. е. тя има вида

$$w - w_0 = \frac{R_1}{R} e^{i\varphi}(z - z_0), \qquad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Лесно се вижда, че тези трансформации наистина изпращат K в K_1 ($|z - z_0| = R$ води до $|w - w_0| = R_1$) и следователно това са търсените решения.

Задача 2.4.9 *Намерете цяла линейна трансформация, която преобразува кръга $|z + i| \leq 1/2$ в кръга* $\left|z - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right| \leq 1$.

Отг. $w - \dfrac{1+i}{\sqrt{2}} = 2(z + i)$

2.5 Понятие за конформност. Дробно-линейна функция $\boldsymbol{w = \dfrac{az + b}{cz + d}}$

Тук накратко ще изложим някои основни правила, по които се получава, „образно казано“, графиката на аналитична функция. Съответната теория се нарича на теория на конформните изображения.

Нека е зададена функция на комплексна променлива $w = f(z)$, дефинирана в областта D в равнината (z). Множеството от значенията на $f(z)$ ще разглеждаме в равнината (w) и означаваме с $G := f(D)$.

Ще отбележим, че не е очевиден алгоритъмът, който позволява да намерим образа G на областта D при изображението $w = f(z)$.[3] *По-лесно е да се работи с криви: ако $z(t)$ е крива в равнината z, то уравнението на образа ѝ е крива $w = f(z(t))$. Като правило изследването на изображения, осъществявани посредством дадена функция се извършва по следната схема: избира се (подходящо за дадената функция) семейство от криви, покриващо интересуващата ни област и се намират техните образи.*

Основно свойство, което характеризира геометричните свойства на изображенията посредством аналитични функции, е понятието за конформност. Имаме следната

Дефиниция 1. *Изображението $w = f(z)$ се нарича конформно в точката $z_0 \in D$, ако запазва ъглите между кривите в точката z_0 по големина и ориентация.*

Локален критерий за конформност. *Всяка аналитична функция осъществява конформно изображение във всички точки, в които производната ѝ е различна от нула.*

Дефиниция 2. *Функцията $f(z)$ се нарича* **еднолистна** *в областта D, ако в различни точки приема различни значения, т. е. $f(z_1) \neq f(z_2)$ при $z_1 \neq z_2$.*

Ако еднозначната функция $w = f(z) : D \to G$ е еднолистна в D, то съществува обратна функция $z = \varphi(w) : G \to D$, която също е еднозначна, аналитична и еднолистна.

Критерий за конформност. *Необходимо и достатъчно условие за конформността на изображението $w = f(z)$ в областта D е $f(z)$ да бъде еднолистна.*

Теорема на Риман. *Съществува аналитична функция $w = f(z)$, изобразяваща взаимно-еднозначно (а следователно и конформно) едносвързана област D върху друга едносвързана област G при условие, че нито една от тях не съвпада с $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ или $\overline{\mathbb{C}}$, т. е. границите им съдържат повече от една точка.*

Изображението е единствено, ако:

(а) Дадена точка z_0 се изобразява в дадена точка w_0 и линия, минаваща през z_0 се завърта на даден ъгъл α, т. е.

$$w_0 = f(z_0), \quad \arg f'(z_0) = \alpha.$$

(б) Точка z_0 от областта D и точка z_1 от границата γ се изобразяват съответно в точка w_0 от областта G и точка w_1 от границата Γ, т. е.

$$w_0 = f(z_0), \quad w_1 = f(z_1).$$

(в) Три гранични точки z_1, z_2, z_3 на областта D се изобразяват в три гранични точки w_1, w_2, w_3 на областта G, т. е.

$$w_1 = f(z_1), \quad w_2 = f(z_2), \quad w_3 = f(z_3).$$

При това, ако се движим по границата γ от z_1 към z_3 през z_2 и областта D остава отляво (отдясно), то при движение по границата Γ от w_1 към w_3 през w_2 областта D също остава отляво (отдясно).

[3] Също така задачата за намиране на аналитична функция, изобразяваща дадена област в друга област, в общия случай може да е доста трудна.

Принцип за съответствие на границите. *Нека областта D е ограничена с гладък или частично-гладък контур γ. Нека функцията $w = f(z)$, аналитична в D и върху γ, изобразява γ в контур Γ, ограничаващ област G. При това, когато z обхожда γ така, че областта D остава отляво, то съответната точка w обхожда Γ така, че областта G също остава отляво. Тогава областта D се изобразява посредством $w = f(z)$ в областта G взаимно-еднозначно и конформно.*

Най-простото конформно изображение разгледахме в предишния параграф. Това е цялата линейна функция $f(z) = az + b$, $a \neq 0$.[4] *Сега ще разгледаме изображението*

$$w = \frac{1}{z}. \tag{2.1}$$

Нека $z = |z|e^{i\arg z} \;\Rightarrow\; w = \dfrac{1}{|z|}e^{-i\arg z} \;\Rightarrow$,

$$\arg w = -\arg z = \arg \bar{z}, \tag{2.2}$$

$$|w| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{|\bar{z}|}. \tag{2.3}$$

От (2.2) *следва, че w и $\bar{z}$ лежат на общ лъч с център началото 0. От* (2.3) *следва, че произведението от разстоянията на w и $\bar{z}$ до точката 0 е равно на 1. Следователно изображението* (2.1) *геометрически представлява симетрия относно реалната права и инверсия*[5] *относно единичната окръжност.*

Нека $z = x + iy$ и $w = \xi + i\eta$. За да намерим образа при изображението (2.1) *на крива, зададена с уравнение в декартови координати, ще изведем формули, свързващи x и y с ξ и η. От*

$$x + iy = z = \frac{1}{w} = \frac{1}{\xi + i\eta} = \frac{\xi - i\eta}{\xi^2 + \eta^2}$$

следва, че

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \qquad y = \frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2}. \tag{2.4}$$

Да разгледаме кривата с уравнение

$$\gamma \,:\, l(x^2 + y^2) + mx + ny + p = 0.$$

Като използваме формулите (2.4)*, получаваме, че*

$$w(\gamma) \,:\, p(\xi^2 + \eta^2) + m\xi - n\eta + l = 0.$$

Следователно при изображението (2.1) *окръжност отива в окръжност (ще напомним, че правите ги разглеждаме като окръжности с безкраен радиус или като окръжности, които минават през безкрайната точка). Тъй като $w(0) = \infty$, то ако γ минава през началото 0, образът $w(\gamma)$ е права линия.*

Изображението (2.1) *е конформно при $z \neq 0$, защото $w'(z) = -1/z^2$.*

Дефиниция 3. Дробно-линейна *(***мьобиусова***)* **трансформация** *се нарича функция от вида*

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

[4] Изображението е конформно, защото $f'(z) = a \neq 0$.

[5] Точките z и z^* са **инверсни относно окръжност** K с център т. a и радиус R , ако лежат на общ лъч с начало т. a и произведението от разстоянията им до центъра a е равно на R^2. Точките z и z^* са **симетрични относно** K, ако всяка права линия или окръжност, минаваща през z и z^*, е ортогонална на K. Лесно се доказва (чрез подобни триъгълници и питагоровата теорема), че горните дефиниции за инверсия и симетрия относно окръжност са еквивалентни. В частния случай, когато K е права, получаваме, че инверсията относно права е симетрия относно тази права.

където $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ *и* $ad - bc \neq 0$ *(*$\Rightarrow$ *w не е константа).* ■

От представянето $w = \dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{bc-ad}{c^2(z+d/c)}$ *се вижда, че w може да се представи като суперпозиция на следните трансформации:*

$$
\begin{array}{lll}
(1) & w_1 = z + d/c & \textit{(транслация)} \\
(2) & w_2 = \dfrac{1}{w_2} & \textit{(трансф. (2.1))} \\
(3) & w_3 = \dfrac{bc-ad}{c^2} w_2 & \textit{(хомотетия и ротация)} \\
(4) & w = a/c + w_3 & \textit{(транслация)}
\end{array}
$$

*Следователно w изобразява окръжност в окръжност (***кръгово свойство***).*

Инвариантност на инверсни (симетрични) точки. *Всяко дробно-линейно преобразование запазва инверсните точки. С други думи, ако* $w = f(z)$ *изобразява окръжността* γ *в окръжност* Γ*, то* $w = f(z)$ *изобразява всяка двойка инверсни спрямо* γ *точки в двойка точки, инверсни спрямо* Γ*. В частност, ако едната от двойка инверсни относно* γ *точки отива в центъра на* Γ*, то другата отива в безкрайната точка.*

Задача 2.5.1 *Да се намери образа на правата* $\operatorname{Re} z = 1$ *при трансформацията* $w = 1/z$*.*

Решение. При трансформацията $w = 1/z$ реалната права се изобразява в реалната права. Изображението е конформно, следователно правата $\operatorname{Re} z = 1$ се изобразява в окръжност, ортогонална на реалната права, т.е. центърът ѝ лежи върху реалната права. Освен това $w(1) = 1$ и $w(\infty) = 0$, откъдето следва, че окръжността минава през т. 1 и т. 0, т. е. това е окръжността с уравнение $\left| w - \dfrac{1}{2} \right| = \dfrac{1}{2}$.

Задачата може да решим и като използваме формулите (2.4). Уравнението на правата $\operatorname{Re} z = 1$ в декартови координати е $x = 1$. От (2.4) следва, че $\dfrac{\xi}{\xi^2 + \eta^2} = 1$, откъдето получаваме $\xi^2 + \eta^2 = \xi$, или $(\xi - \frac{1}{2})^2 + \eta^2 = \frac{1}{4}$.

Задача 2.5.2 *Да се намери образа на правата* $\operatorname{Im} z = 1$ *при трансформацията* $w = \dfrac{z-1}{z+1}$*.*

Решение. Тъй като $w = 1 - \dfrac{2}{z+1}$, то w може да се представи като суперпозиция на следните трансформации:

$$
\begin{array}{lll}
(1) & w_1 = z + 1 & \text{(транслация)} \\
(2) & w_2 = \dfrac{1}{w_1} & \text{(трансф. (2.1))} \\
(3) & w_3 = -2w_2 & \text{(ротация и хомотетия)} \\
(4) & w = 1 + w_3 & \text{(транслация)}
\end{array}
$$

При w_1 правата $\operatorname{Im} z = 1$ се изобразява в себе си. При w_2 правата $\operatorname{Im} z = 1$ се изобразява в окръжността $|w_2 - \dfrac{i}{2}| = \dfrac{1}{2}$. При w_3 окръжността $|w_2 - \dfrac{i}{2}| = \dfrac{1}{2}$

се изобразява в окръжността $|w_3 - i| = 1$, която при w се изобразява в $|w - i - 1| = 1$.

Задача 2.5.3 *Да се намери образа на окръжността* $|z + 1| = 1$ *при трансформацията* $w = 1/z$.

Отг. $\operatorname{Re} w = -\dfrac{1}{2}$

Задача 2.5.4 *Да се намери образа на окръжността* $|z| = 2$ *при трансформацията* $w = z/(1 + z)$.

Отг. $\left|w - \dfrac{4}{3}\right| = \dfrac{2}{3}$

Задача 2.5.5 *Да се намери образа на* $\operatorname{Re} z = 1$ *при трансформацията* $w = z/(1 + z)$.

Отг. $\left|w - \dfrac{3}{4}\right| = \dfrac{1}{4}$

Задача 2.5.6 *Да се намери образа на окръжността* $|z| = 1$ *при трансформацията* $w = \dfrac{i + z}{i - z}$.

Отг. $\operatorname{Re} w = 0$

Задача 2.5.7 *Да се намери образа на областта*

$$\{z \in \mathbb{C} \,:\, 0 < \operatorname{Re} z < 1, \quad \operatorname{Im} z > 0\}$$

при трансформацията $w = 1/z$.

Отг. Четвърти квадрант без полукръга $\left|w - \dfrac{1}{2}\right| < \dfrac{1}{2}$

Задача 2.5.8 *Да се намери образа на реалната ос* $\operatorname{Im} z = 0$ *при дробно-линейната трансформация* $w = \dfrac{az + b}{cz + d}$ *и да се определи радиусът* r *и центърът* m *на съответната окръжност.*

Решение. Тъй като $-d/c$ се изобразява в ∞, то реалната ос се изобразява в права, когато $\operatorname{Im}(-d/c) = 0$ (тогава радиусът е безкрайност, а център няма). Затова приемаме, че $\operatorname{Im}(-d/c) \neq 0$. Една от точките на окръжността е $w = b/d$ като образ на точката $z = 0$. За да намерим центъра, използваме факта, че той е инверсен на $w = \infty$. Съответните първообрази са $z = -d/c$ и нейната инверсна (симетрична) относно реалната ос, $z = -\bar{d}/\bar{c}$. Така че

$$m = \frac{a(-\bar{d}/\bar{c}) + b}{c(-\bar{d}/\bar{c}) + d} = \frac{b\bar{c} - a\bar{d}}{d\bar{c} - c\bar{d}}\ .$$

За радиуса, като разстояние между центъра и една от точките на окръжността, получаваме

$$r = \left|m - \frac{b}{d}\right| = \left|\frac{b\bar{c} - a\bar{d}}{d\bar{c} - c\bar{d}} - \frac{b}{d}\right| = \left|\frac{(bc - ad)\bar{d}}{(d\bar{c} - c\bar{d})d}\right| = \left|\frac{bc - ad}{d\bar{c} - c\bar{d}}\right|.$$

Задача 2.5.9 *Докажете, че уравнението на инверсията относно окръжността* $|z-a| = R$ *е*

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a. \tag{2.5}$$

Решение. Трябва да покажем, че точката z^*, определена с (2.5), удовлетворява геометричната дефиниция за инверсия относно окръжност. От (2.5) получаваме $(z^*-a)(\bar{z}-\bar{a}) = R^2$, откъдето следва, че $|z^*-a|\,|\bar{z}-\bar{a}| = R^2$ и $\arg(z^*-a) + \arg(\bar{z}-\bar{a}) = \arg R^2 = 0$. Тъй като $\arg(\bar{z}-\bar{a}) = -\arg(z-a)$, то $\arg(z^*-a) = \arg(z-a)$. Следователно z и z^* лежат на общ лъч с начало т. a.

Задача 2.5.10 *Да се намери общия вид на дробно–линейните трансформации, които изобразяват горната полуравнина* $\operatorname{Im} z > 0$ *върху единичния кръг* $|w| < 1$.

Решение. Нека $w(z)$ е дробно–линейна трансформация, която изобразява горната полуравнина $\operatorname{Im} z > 0$ върху единичния кръг $|w| < 1$. Тогава контурът на областта $\operatorname{Im} z = 0$ се изобразява в единичната окръжност $|w| = 1$. При това съществува т. $z_0,\ \operatorname{Im} z_0 > 0$, такава че $w(z_0) = 0$. Инверсната на z_0 точка относно реалната права, $z_0^* = \bar{z}_0$, ще се изобрази в точка, инверсна на т. 0 относно единичната окръжност, т.е. в безкрайната точка. Следователно $w(\bar{z}_0) = \infty$. Тогава $w(z) = K\dfrac{z-z_0}{z-\bar{z}_0},\ K \in \mathbb{C}$. Сега ще определим K, като използваме, че ако $z = x$ е реално число, то $|w(z)| = 1$. Имаме, че $|K|\dfrac{|x-z_0|}{|x-\bar{z}_0|} = 1$, откъдето следва, че $|K| = 1$ или $K = e^{i\alpha}$. Следователно

$$w(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}, \quad \alpha \in \mathbb{R},\ \operatorname{Im} z_0 > 0.$$

Непосредствено се проверява, че трансформации от този вид са решение на задачата.

Задача 2.5.11 *Да се намери общия вид на дробно–линейните трансформации, които изобразяват единичния кръг* $|z| < 1$ *върху единичния кръг* $|w| < 1$.

Решение. Нека $w(z)$ е дробно–линейна трансформация, която изобразява единичния кръг $|z| < 1$ върху единичния кръг $|w| < 1$. Тогава контурът на областта $|z| = 1$ се изобразява върху единичната окръжност $|w| = 1$. При това съществува точка $z_0,\ |z_0| < 1$, такава че $w(z_0) = 0$. Инверсната на z_0 точка относно единичната окръжност, $z_0^* = \dfrac{1}{\bar{z}_0}$, ще се изобрази в точка, инверсна на т. 0 относно единичната окръжност, т.е. в безкрайната точка. Следователно $w(\dfrac{1}{\bar{z}_0}) = \infty$. Тогава $w(z) = K\dfrac{z-z_0}{z-\frac{1}{\bar{z}_0}},\ K \in \mathbb{C}$. Сега ще определим K, като използваме, че ако $|z| = 1$, то $|w(z)| = 1$. Имаме, че

$$1 = |K|\frac{|z-z_0|}{\left|z-\frac{1}{\bar{z}_0}\right|} = |K|\frac{|z-z_0|}{\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{\bar{z}_0}\right|} = |K|\,|z_0|,$$

откъдето следва, че $|K| = \dfrac{1}{|z_0|}$ или $K = \dfrac{1}{|z_0|}e^{i\alpha},\ \alpha \in \mathbb{R}$. Следователно

$$w(z) = e^{i\alpha}\frac{z-z_0}{\bar{z}_0 z - 1}, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ |z_0| < 1.$$

Непосредствено се проверява, че това са наистина решения на задачата.

Задача 2.5.12 *Да се намери дробно–линейна трансформация, която преобразува непресичащите се окръжности* $C_1 : |z-a_1| = r_1$ *и* $C_2 : |z-a_2| = r_2$ *в концентрични окръжности с център точката* 0.

Решение. Търсим точки z и z^*, инверсни едновременно спрямо C_1 и C_2. За целта решаваме системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} z^* = \dfrac{r_1^2}{\bar{z}-\bar{a}_1} + a_1 \\ z^* = \dfrac{r_2^2}{\bar{z}-\bar{a}_2} + a_2. \end{array} \right.$$

Тя се свежда до квадратно уравнение относно $\overline{z}$. От двете му решения получаваме двойката инверсни точки z и z^*, след което изобразяваме $z \to 0$ и $z^* \to \infty$.

Задача 2.5.13 *Да се намери дробно–линейна трансформация, преобразуваща в концентрични окръжности*

(а) $|z| = 1$ *и* $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$

(б) $|z| = 1$ *и* $\operatorname{Re} z = 2$

Отг. $z,\, z^* = 2 \pm \sqrt{3},\ w_1 = \frac{z-(2+\sqrt{3})}{z-(2-\sqrt{3})},\ w_2 = \frac{z-(2-\sqrt{3})}{z-(2+\sqrt{3})}$

Всяка област, чийто контур се състои от две непресичащи се окръжности, може да се изобрази еднолистно и конформно във венец между две концентрични окръжности с постоянно отношение μ *на радиусите на външната и вътрешната окръжност. Числото* μ *ще наричаме* **модул** *на областта.*

Задача 2.5.14 *Намерете модула на областта, контурът на която се състои от окръжностите* $|z-i| = \frac{1}{2}$ *и* $|z+i| = \frac{1}{2}$.

Решение. Първо намираме точки z и z^*, инверсни относно двете окръжности едновременно. За целта решаваме системата уравнения

$$\left| \begin{array}{l} z^* = \dfrac{1}{4(\bar{z}-i)} - i \\ z^* = \dfrac{1}{4(\bar{z}+i)} + i, \end{array} \right.$$

откъдето намираме $z,\, z^* = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Дробно-линейната трансформация $w = \dfrac{z - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{z + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$ изобразява областта във венец между две концентрични окръжности, като $|z-i| = \frac{1}{2}$ се изобразява във вътрешния контур на венеца, а $|z+i| = \frac{1}{2}$ –във външния. Тогава

$$\mu = \left| \frac{-\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \right| : \left| \frac{\frac{i}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{i}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} \right| = \frac{(1+\sqrt{3})^2}{(1-\sqrt{3})^2} = 7 + 4\sqrt{3}.$$

Отг. $\mu = 7 + 4\sqrt{3}$

Задача 2.5.15 *Намерете модула на областта, контурът на която се състои от окръжностите* $|z| = 1$ *и* $|z - 1| = \frac{5}{2}$.

Отг. $z,\, z^* = 4,\, \dfrac{1}{4};\ \mu = 2$

Задача 2.5.16 ♠ *Областта с контур* $\operatorname{Re} z = 0$ *и* $|z - h| = 1,\ h > 1$ *има модул* $\mu = 2$. *Намерете* h.

Решение. Тъй като $\mu = 2$, то можем да намерим дробно-линейна трансформация, която изобразява областта във венеца $1 < |w| < 2$. За целта намираме точки z и z^*, които са инверсни едновременно относно правата $\operatorname{Re} z = 0$ и окръжността $|z - h| = 1$. Те удовлетворяват уравнението

$$\frac{1}{\bar{z} - h} + h = -\bar{z},$$

откъдето получаваме $z,\, z^* = \pm\sqrt{h^2 - 1}$. Тогава една от възможните дробно-линейни трансформации е $w = K\dfrac{z - \sqrt{h^2 - 1}}{z + \sqrt{h^2 - 1}}$. Тя изобразява окръжността $|z - h| = 1$ в $|w| = 1$ и правата $\operatorname{Re} z = 0$ в $|w| = 2$. Тогава $|w(0)| = 2 = |K|$ и $|w(h + 1)| = 1 = |K|\dfrac{h + 1 + \sqrt{h^2 - 1}}{h + 1 - \sqrt{h^2 - 1}}$. Като решим уравнението

$$2\frac{h + 1 + \sqrt{h^2 - 1}}{h + 1 - \sqrt{h^2 - 1}} = 1,$$

получаваме $h = \dfrac{5}{4}$. Тогава $w = 2e^{i\alpha}\dfrac{4z - 3}{4z + 3}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Другата възможност е дробно-линейната трансформация
$w = K\dfrac{z + \sqrt{h^2 - 1}}{z - \sqrt{h^2 - 1}}$. Случаят се разглежда аналогично.

Отг. $h = \dfrac{5}{4},\ w_1(z) = 2e^{i\alpha}\dfrac{4z - 3}{4z + 3};\ w_2(z) = e^{i\alpha}\dfrac{4z + 3}{4z - 3},\ \alpha \in \mathbb{R},$

2.6 Елементарни трансцендентни функции.

Експоненциалната функция e^z, $z = x + iy$ $\in \mathbb{C}$, *дефинирахме в Глава 1, зад. 1.2.6, като границата при* $n \to \infty$ *на редицата с общ член* $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$. *Доказахме, че*

$$e^z := \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i\sin y).$$

По-нататък в Глава 2, зад. 2.2.7, дадохме друга еквивалентна дефиниция на $e^z := e^x(\cos y + i\sin y)$ *– като решение на диференциалното уравнение*

$$\frac{df}{dz} = f(z), \quad f(0) = 1.$$

Сега ще дефинираме същата функция по още един начин.

Дефиниция 1. Експоненциалната функция e^z *е сума на абсолютно сходящия в цялата комплексна равнина степенен ред*

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots .$$

От дефиниция 1 след почленно диференциране получаваме, че

$$\frac{d}{dz} e^z = e^z \quad \textit{за всяко } z \in \mathbb{C}.$$

Също така е очевидно, че $e^0 = 1$. *Следователно дефиниция 1 е еквивалентна на предишните две дефиниции.*

Ще докажем следните основни свойства на функцията e^z*:*

(а) $e^z \neq 0$ *за всяко* $z \in \mathbb{C}$,

(б) $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$,

(в) e^z *е* $2\pi i-$ *периодична, т. е.* $e^{z+2\pi i} = e^z$ *за всяко* $z \in \mathbb{C}$,

(г) $e^{z_1}.e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ (*събирателна теорема*).

Доказателство. (а) Тъй като $e^x \neq 0$ за всяко $x \in \mathbb{R}$ и $\cos y$ и $\sin y$, $y \in \mathbb{R}$, не са едновременно нули, то $e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \neq 0$, за всяко $z \in \mathbb{C}$.

(б) , **(в)** От $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ следва, че

$$|e^z| = e^x, \ \arg e^z = y + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Следователно $e^z = 1 \iff x = 0, \ y = 2k\pi$, т. е. $z = 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$. Също така $e^{z_1} = e^{z_2} \iff z_1 = z_2 + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}$, откъдето получаваме, че

$$e^{z+2\pi i} = e^z \text{ за всяко } z \in \mathbb{C},$$

т. е. e^z е $2\pi i$-периодична функция.

(г) Нека $z_k = x_k + i\, y_k$, $k = 1, 2$. Тогава е изпълнено, че

$$\begin{aligned} e^{z_1}.e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1)\, e^{x_2}(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)) = e^{z_1+z_2}. \end{aligned}$$

Събирателната теорема може да се докаже и като умножим почленно двата реда

$$e^{z_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_1^n}{n!}, \quad e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z_2^n}{n!}$$

по правилото на Коши-Мертенс (вж. Глава 4, Ред на Тейлър).

Сега ще докажем забележителната формула на Ойлер, свързваща експоненциалната с тригонометричните функции.

Формула на Ойлер.

$$\boldsymbol{e^{iy} = \cos y + i \sin y}, \quad y \in \mathbb{R} \tag{2.1}$$

Доказателство. Нека $z = iy$. От дефиниция 1 следва, че

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \dots.$$

Като отделим реалната и имагинерна части, получаваме

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \dots\right) \\ &= \cos y + i \sin y, \end{aligned}$$

тъй като последните два реда представляват тейлъровите развития около нулата съответно на $\cos y$ и на $\sin y$. ■

От формулата на Ойлер (2.1) следват формулите

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}, \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \ y \in \mathbb{R},$$

от които по естествен начин следва дефиницията на комплексните тригонометрични функции.

Дефиниция 2. За всяко $z \in \mathbb{C}$ **тригонометричните функции** $\boldsymbol{\sin z}$**,** $\boldsymbol{\cos z}$ се дефинират чрез формулите

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

От дефиниция 2 следва, че $\sin z$ и $\cos z$ са аналитични функции и

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{1}{2i}(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}) = \cos z.$$

Аналогично се получава, че $\dfrac{d}{dz} \cos z = -\sin z$. Също така от дефиниция 2 следва формулата

$$\boldsymbol{e^{iz} = \cos z + i \sin z}, \ z \in \mathbb{C},$$

която е обобщение на формулата на Ойлер (2.1).

Дефиниция 3. Функциите $\mathbf{tg}\,\boldsymbol{z}$ и $\mathbf{cotg}\,\boldsymbol{z}$ се определят с равенствата

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Изпълнено е, че

$$\frac{d}{dz} \operatorname{tg} z = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad \frac{d}{dz} \operatorname{cotg} z = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Чрез естественото обобщение на дефинициите в реалния случай се дефинират и комплексните хиперболични функции.

Дефиниция 4. Хиперболичните функции $\mathbf{sh}\, z$, $\mathbf{ch}\, z$, $\mathbf{th}\, z$ и **$\mathbf{cth}\, z$** се дефинират с формулите

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}\,, \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$
$$\operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh}\, z}{\operatorname{ch}\, z}\,, \qquad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch}\, z}{\operatorname{sh}\, z}.$$

■

Тригонометричните и хиперболичните функции са свързани със следните съотношения:

$$\sin z = -i \operatorname{sh} iz\,, \qquad \cos z = \operatorname{ch} iz$$
$$\operatorname{tg} z = -i \operatorname{th} iz\,, \qquad \operatorname{cotg}\, z = i \operatorname{cth} iz.$$

Дефиниция 5. Логаритмичната функция $\mathbf{Log}\, z$ е обратна на експоненциалната функция, т. е. $w = \operatorname{Log} z$ е всяко решение на уравнението $e^w = z$.

Тъй като $e^w \neq 0$, ще предполагаме, че $z \neq 0$. Сега ще намерим $\operatorname{Log} z$ в явен вид. Нека $w = u + iv$ и $z = |z|e^{i \arg z}$, $-\pi < \arg z < \pi$. Тогава от

$$e^{u+iv} = e^u e^{iv} = |z|e^{i \arg z}$$

получаваме

$$(1)\ e^u = |z| \;\Rightarrow\; u = \ln |z|,$$
$$(2)\ v = \arg z + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Следователно за всяко $z \in \mathbb{C},\ z \neq 0$,

$$w = \operatorname{Log} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad -\pi < \arg z < \pi.$$

Очевидно $w = \operatorname{Log} z$ е многозначна функция. Ако фиксираме някое k, получаваме еднозначен клон на $\operatorname{Log} z$, който означаваме с $\operatorname{Log}_k z$. Еднозначният клон $\operatorname{Log}_0 z$ се нарича **главна стойност** на $\operatorname{Log} z$. Изпълнено е, че

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log}_k z = \frac{1}{z},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ще отбележим още, че равенството

$$\operatorname{Log} z_1 z_2 = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$$

е вярно в смисъл на равенство между множества (в него участват подмножества на $\mathbb{C}$).

Дефиниция 6. Нека z, $\alpha \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. **Степенна функция** дефинираме с формулата

$$\mathbf{z}^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z} = e^{\operatorname{Log}_0 z} e^{2k\alpha\pi i}.$$

■

Възможни са три случая в зависимост от α:

1. Нека $\alpha = m \in \mathbb{Z}$. Тогава $e^{2km\pi i} = 1$, следователно $z^m = e^{m \operatorname{Log}_0 z}$ е еднозначна функция.

2. Нека $\alpha = \frac{p}{q}$ е несъкратима дроб, $q > 0$. Тогава $e^{2k\frac{p}{q}\pi i}$ приема точно q различни стойности (това са корените на уравнението $z^q = 1$). Следователно $z^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{p}{q}\mathrm{Log}_0 z} e^{i\frac{2kp\pi}{q}},\ k = 0, 1, \ldots, q-1$ е q-значна функция.

3. Нека α не е рационално число. Тогава $e^{2k\alpha\pi i}$ приема безбройно много различни стойности. Следователно функцията z^α е безбройно многозначна.

Равенството $z_1^\alpha z_2^\alpha = (z_1 z_2)^\alpha$ също е вярно в смисъл на равенство между множества.

Дефиниция 7. Функцията w=$\boldsymbol{\arcsin z}$ е обратна на функцията $\sin w$, т. е. $w = \arcsin z$ е всяко решение на уравнението $z = \sin w$. ■

От уравнението

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

получаваме

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

Като решим квадратното уравнение относно e^{iw}, получаваме

$$e^{iw} = iz + (1 - z^2)^{1/2},\ z \neq \pm 1, \tag{2.2}$$

където функцията $(1 - z^2)^{1/2}$, $z \neq \pm 1$, е двузначна. Като логаритмуваме двете страни на (2.2), получаваме

$$\arcsin z = -i\,\mathrm{Log}\,(iz + \sqrt{1 - z^2}),\ z \neq \pm 1.$$

За да отделим еднозначен клон на многозначната функция $\arcsin z$, първо избираме еднозначен клон на квадратния корен и след това избираме еднозначен клон на логаритъма.

Аналогично се получават формулите за обратните тригонометрични функции $\boldsymbol{\arccos z}$, $\boldsymbol{\mathrm{arctg}\, z}$, $\boldsymbol{\mathrm{arccotg}\, z}$,

$$\arccos z = -i\,\mathrm{Log}\,(z + \sqrt{z^2 - 1}),\ z \neq \pm 1,$$

$$\mathrm{arctg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Log}\frac{1 + iz}{1 - iz} = \frac{i}{2}\mathrm{Log}\,\frac{i + z}{i - z},\ z \neq \pm i,$$

$$\mathrm{arccotg}\, z = -\frac{i}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{z + i}{z - i},\ z \neq \pm i.$$

Задача 2.6.1 *Да се намерят реалната и имагинерна части на функцията* $w = u + iv$, *където*

(а) $w = 2z - 1$, **(б)** $w = z + z^2$, **(в)** $w = \dfrac{1}{z}$,

(г) $w = e^{-z}$, **(д)** $w = e^{z^2}$.

Решение.

(а)
$$\begin{aligned} w &= 2z - 1 = 2(x + iy) - 1 = (2x - 1) + 2iy \\ &\Rightarrow u = 2x - 1,\ v = 2y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(б) } w &= z+z^2 = (x+iy)+(x+iy)^2 = (x+iy)+(x^2-y^2+2ixy) \\
&\Rightarrow u = x^2-y^2+x,\ v=(2x+1)y,
\end{aligned}$$

$$\textbf{(в) } w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad u = \frac{x}{x^2+y^2},\ \ v = \frac{-y}{x^2+y^2},$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(г) } w &= e^{-z} = e^{-(x+iy)} = e^{-x}(\cos y - i\sin y) \\
&\Rightarrow u = e^{-x}\cos y,\ v = -e^{-x}\sin y,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(д) } w &= e^{z^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{x^2-y^2+2ixy} \\
&\Rightarrow u = e^{x^2-y^2}\cos 2xy,\ v = e^{x^2-y^2}\sin 2xy.
\end{aligned}$$

Задача 2.6.2 *Пресметнете* $\sin z$ *при* $z = \pi + i\ln(2+\sqrt{5})$.

Решение.

$$\begin{aligned}
\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i} \\
&= \frac{(e^{-y}-e^{y})\cos x + i(e^{-y}+e^{y})\sin x}{2i}.
\end{aligned}$$

Тъй като $z = \pi + i\ln(2+\sqrt{5}) = x+iy$, имаме

$$\begin{aligned}
\sin\left(\pi + i\ln(2+\sqrt{5})\right) &= \frac{e^{-\ln(2+\sqrt{5})}-e^{\ln(2+\sqrt{5})}}{2i}\cos\pi \\
&= \frac{2+\sqrt{5}-\frac{1}{2+\sqrt{5}}}{2i} = \frac{2+\sqrt{5}+2-\sqrt{5}}{2i} = -2i.
\end{aligned}$$

Задача 2.6.3 *Да се намерят модулът и главното значение на аргумента на дадените функции в указаните точки.*

(а) $w = \cos z, \qquad z = \frac{\pi}{2} + i\ln 2,$

(б) $w = \operatorname{sh} z, \qquad z = 1 + i\frac{\pi}{2},$

(в) $w = ze^{z}, \qquad z = \pi i,$

(г) $w = \operatorname{th} z, \qquad z = \pi i.$

Решение.

(а) $$\cos(\frac{\pi}{2}+i\ln 2) = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+i\ln 2)}+e^{-i(\frac{\pi}{2}+i\ln 2)}}{2} = \frac{i\,e^{-\ln 2}-i\,e^{\ln 2}}{2} = \frac{i}{2}(\frac{1}{2}-2) = -\frac{3}{4}i \Rightarrow |w| = \frac{3}{4},\ \arg w = -\frac{\pi}{2}.$$

(б) $$\operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \frac{e^{1+i\pi/2}-e^{-1-i\pi/2}}{2} = \frac{e.i+e^{-1}.i}{2} = i\operatorname{ch}1 \ \Rightarrow\ |w| = \operatorname{ch}1,\ \arg w = \frac{\pi}{2}.$$

(в) $$ze^z = \pi i e^{\pi i} = \pi i(-1) = \pi e^{-i\pi/2} \Rightarrow |w| = \pi,\ \arg w = -\pi/2.$$

(г) $$\operatorname{th}\pi i = \frac{\operatorname{sh}\pi i}{\operatorname{ch}\pi i} = \frac{e^{\pi i}-e^{-\pi i}}{e^{\pi i}+e^{-\pi i}} = \frac{-1+1}{-1-1} = 0 \Rightarrow |z| = 0,\ \arg z - -\text{неопределен}.$$

Задача 2.6.4 *Да се намерят логаритмите на следните числа*

(а) e, **(б)** i, **(в)** $-1-i$, **(г)** $3-2i$.

Решение.

(а) $$\operatorname{Log} e = \ln|e| + i(\arg e + 2k\pi) = 1 + 2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}.$$

(б) $$\operatorname{Log} i = \ln|i| + i(\arg i + 2k\pi) = i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

(в) $$\operatorname{Log}(-1-i) = \ln|-1-i| + i\big(\arg(-1-i)+2k\pi\big) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\tfrac{3\pi}{4}+2k\pi\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

(г) $$\operatorname{Log}(3-2i) = \ln|3-2i| + i[\arg(3-2i)+2k\pi] = \ln\sqrt{13} + i\big(\operatorname{arctg}\left(-\tfrac{2}{3}\right)+2k\pi\big) = \ln\sqrt{13} + i\big(-\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+2k\pi\big),\ k\in\mathbb{Z}.$$

Задача 2.6.5 *Да се намерят модулите и аргументите на числата*

(а) $z = 10^i$, **(б)** $z = 3^{2-i}$.

Решение.

(а) $$10^i = e^{i\operatorname{Log}10} = e^{i(\ln 10+2k\pi i)} = e^{-2k\pi+i\ln 10} \Rightarrow |z| = e^{-2k\pi},\ \arg z = \ln 10 + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$$

(б) $$3^{2-i} = e^{(2-i)\operatorname{Log}3} = e^{(2-i)(\ln 3+2k\pi i)} = e^{2\ln 3+2k\pi+i(4k\pi-\ln 3)} \Rightarrow |z| = 9e^{2k\pi},\ \arg z = 2k\pi - \ln 3,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Задача 2.6.6 *Намерете*

(а) $z = i^i$, **(б)** $z = i^{\frac{1}{i}}$, **(в)** $z = 1^i$,

(г) $z = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i}$, **(д)** $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{1+i}$, **(е)** $z = (1-i)^{3-3i}$.

Решение. Навсякъде в решението $k \in \mathbb{Z}$.

(а) $i^i = e^{i\operatorname{Log} i} = e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}$.

(б) $i^{\frac{1}{i}} = i^{-i} = e^{-i\operatorname{Log} i} = e^{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$.

(в) $1^i = e^{i\operatorname{Log} 1} = e^{-2k\pi}$.

(г) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2i} = e^{2i\operatorname{Log}\frac{1+i}{\sqrt{2}}} = e^{-2(\frac{\pi}{4}+2k\pi)}$.

(д) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{1+i} = e^{(1+i)\operatorname{Log}\frac{\sqrt{3}+i}{2}} = e^{(1+i)i(\frac{\pi}{6}+2k\pi)} = e^{(i-1)(\frac{\pi}{6}+2k\pi)}$.

(е)
$$
\begin{aligned}
(1-i)^{3-3i} &= e^{(3-3i)\operatorname{Log}(1-i)} = e^{(3-3i)[\ln\sqrt{2}+i(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)]} \\
&= e^{3\ln\sqrt{2}+3(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)-3i(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi)} \\
&= 2\sqrt{2}e^{3(-\frac{\pi}{4}+2k\pi)-3i(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2k\pi)} \\
&= -2(1+i)e^{3(-\frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln\sqrt{2})}.
\end{aligned}
$$

Задача 2.6.7 *Да се реши уравнението* $\sin z = 3$.

Решение. За да решим уравнението $\sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = 3$, полагаме $u = e^{iz}$. Получаваме уравнението $u^2 - 6iu - 1 = 0$, чиито решения са $u = i(3 \pm 2\sqrt{2})$. Тогава $e^{iz} = i(3\pm 2\sqrt{2}) \;\Rightarrow\; iz = \operatorname{Log}(i(3\pm 2\sqrt{2})) \;\Rightarrow$

$$z = -i\big(\ln(3\pm 2\sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)\big) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln(3\pm 2\sqrt{2}),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 2.6.8 *Да се решат уравненията*

(а) $e^{-z}+1=0$, **(б)** $e^{-z}+i=0$,

(в) $4\cos z + 5 = 0$, **(г)** $e^{2z}+2e^z-3=0$,

(д) $\operatorname{Log}(z+i)=0$, **(е)** $\operatorname{Log}(i-z)=1$.

Решение.

(а) $e^{-z} = -1 \;\Rightarrow\; z = -\mathrm{Log}\,(-1) = -i(\pi + 2k\pi) = -\pi(2k+1)i,\; k \in \mathbb{Z}.$

(б) $e^{-z} = -i \;\Rightarrow\; z = -\mathrm{Log}\,(-i) = -i(-\pi/2 + 2k\pi) = -\dfrac{\pi(4k-1)}{2}i,\; k \in \mathbb{Z}.$

(в) В уравнението $4\cos z + 5 = 2(e^{iz} + e^{-iz}) + 5 = 0$ полагаме $u = e^{iz}$.

Получаваме уравнението $2u^2 + 5u + 2 = 0$, чиито решения са

$$u = \frac{-5 \pm 3}{4} \;\Rightarrow\; z = -i\,\mathrm{Log}\,\frac{-5 \pm 3}{4} = -i\Big(\ln\Big|\frac{-5 \pm 3}{4}\Big| + i(\pi + 2k\pi)\Big)$$
$$= (2k+1)\pi - i\ln\Big|\frac{-5 \pm 3}{4}\Big| = (2k+1)\pi \pm i\ln 2,\; k \in \mathbb{Z}.$$

(г) При $u = e^z$ имаме $u^2 + 2u - 3 = 0$,

чиито решения са $u_1 = 1,\; u_2 = -3 \;\Rightarrow$

$z_{2k} = \mathrm{Log}\,1 = 2k\pi i,\; z_{2k+1} = \mathrm{Log}\,(-3) = (2k+1)\pi i + \ln 3,\; k \in \mathbb{Z}.$

(д) $z + i = e^0 = 1 \;\Rightarrow\; z = 1 - i$

(е) $i - z = e^1 \;\Rightarrow\; z = i - e.$

Задача 2.6.9 *Да се реши уравнението* $\cos z = 2i$.

Отг. $z = \pm\pi/2 + 2k\pi \mp i\ln(\sqrt{5} + 2), \quad k \in \mathbb{Z}.$

Задача 2.6.10 *Да се запише в алгебричен вид числото* $w = \arcsin \frac{\pi}{3} i$.

Решение.

$$w = -i\,\mathrm{Log}\big(-\pi/3 + \sqrt{1 + \pi^2/9}\big) = -i\big(\ln(-\pi/3 + \sqrt{1 + \pi^2/9}) + 2k\pi i\big)$$
$$= 2k\pi - i\big(\ln(-\pi/3 + \sqrt{1 + \pi^2/9}),\; k \in \mathbb{Z}.$$

Задача 2.6.11 *Да се запише в алгебричен вид числото* $w = \mathrm{arctg}(1 + i)$.

Решение.

$$w = \frac{i}{2}\mathrm{Log}\,\frac{i + 1 + i}{i - 1 - i} = \frac{i}{2}\mathrm{Log}\,(-1 - 2i) = \frac{i}{2}\big(\ln\sqrt{5} + i(\mathrm{arctg}\,2 + 2k\pi)\big)$$
$$= -\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\,2 + 2k\pi + \frac{i}{2}\ln\sqrt{5},\; k \in \mathbb{Z}.$$

2.7 Редове от комплексни числа. Степенни редове

Дефиниция 1. *Безкрайният ред* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n,\ c_n \in \mathbb{C}$, *се нарича* **сходящ**, *ако редицата от парциалните му суми* $S_N = \sum_{n=1}^{N} c_n$ *е сходяща при* $N \to \infty$. *Границата на редицата се нарича* **сума** *на реда.*

Дефиниция 2. *Безкрайният ред* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *се нарича* **абсолютно сходящ**, *ако е сходящ редът* $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$. *Ако редът е сходящ, но не е абсолютно сходящ, се нарича* **условно сходящ**.

В сила са следните твърдения, повечето от които са добре известни от реалния анализ:

- *Всеки абсолютно сходящ ред е сходящ.*
- *Ако* $c_n = a_n + ib_n$ $(a_n,\, b_n \in \mathbb{R})$, *то редът* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *е сходящ (абсолютно сходящ) тогава и само тогава, когато са сходящи (абсолютно сходящи) и двата реда* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.
- *Редът* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *е абсолютно сходящ, ако е изпълнено едно от следните условия:*

  (а) $|c_n| < M\rho^n$ *при* $n > n_0$; $n_0 \in \mathbb{N}, M > 0$; $0 < \rho < 1$ *(мажориране със сходяща геометрична прогресия)*

  (б) $|c_n| < Mn^{-\alpha}$ *при* $n > n_0$; $n_0 \in \mathbb{N}, M > 0$; $\alpha > 1$ *(мажориране със сходящ ред)*

  (в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \rho < 1$ *(критерий на Даламбер)*

  (г) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|} - 1\right) = \alpha > 1$ *(критерий на Раабе–Дюамел)*

  (д) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \rho < 1$ *(критерий на Коши)*

Дефиниция 3. Степенен ред *се нарича ред от вида*

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{2.1}$$

където коефициентите $c_0, c_1, \ldots$ *са постоянни комплексни числа.*

Дефиниция 4. Област на сходимост *на реда* (2.1) *се нарича множеството от точки* $z \in \mathbb{C}$, *за които този ред е сходящ.*

Очевидно всеки ред от вида (2.1) е сходящ при $z = 0$. *Нека имаме поне една точка* $z_0 \neq 0$, *за която редът е сходящ. Тогава имаме следната важна*

Лема на Абел. *Ако редът* (2.1) *е сходящ при* $z = z_0$, *то той е абсолютно сходящ за всяко* z, *за което* $|z| < |z_0|$.

Доказателство. Тъй като редът

$$c_0 + c_1 z_0 + c_2 z_0^2 + \ldots + c_n z_0^n + \ldots \tag{2.2}$$

е сходящ, то $\lim\limits_{n\to\infty} c_n z_0^n = 0$. Следователно съществува константа C, така че за всяко $n \in \mathbb{N}$ е в сила

$$|c_n z_0^n| < C.$$

От горното неравенство следва, че

$$|c_n z^n| = |c_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n < C \left|\frac{z}{z_0}\right|^n = C\, q^n,$$

където $q = \left|\dfrac{z}{z_0}\right| = \dfrac{|z|}{|z_0|} < 1$. Доказахме, че редът $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n||z_n|^n$ се мажорира от сходяща геометрична прогресия, откъдето следва абсолютната сходимост на реда (2.2).■

Теорема на Абел. За всеки степенен ред от вида (2.1) съществува число $0 \le R \le \infty$, така че редът е абсолютно сходящ при $|z| < R$ и разходящ при $|z| > R$. ■

Дефиниция 5. Числото R се нарича **радиус на сходимост**. Ако редът е сходящ само за $z = 0$, казваме, че редът е разходящ и считаме, че $R = 0$, а ако е сходящ за всяко $z \in \mathbb{C}$, считаме, че $R = \infty$.

Формула на Коши-Адамар.

$$R = \frac{1}{l}, \text{ където}^6 \quad l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|c_n|}\,.$$

В случая, когато $c_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, можем да използваме критерия на Даламбер за да намерим R. С получената формула, представена в следващата задача, често радиусът на сходимост се намира по-лесно.

Задача 2.7.1 *Да се докаже, че*

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}, \tag{2.3}$$

ако границата съществува.

Решение. Нека $A := \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$. Прилагаме критерия на Даламбер за реда от абсолютните стойности $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$. Имаме, че

$$\frac{|c_{n+1} z^{n+1}|}{|c_n z^n|} = |z| \left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \to \frac{|z|}{A} \quad \text{при } n \to \infty,$$

откъдето следва, че редът (2.1) е абсолютно сходящ при $|z| < A$ и разходящ при $|z| > A$, защото общият му член не клони към нула. Следователно $R = A$.

Задача 2.7.2 *Намерете радиусите на сходимост на следните степенни редове:*

(а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ **(б)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^\alpha z^n \ \alpha \in \mathbb{R}$,

(в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} z^n$ **(г)** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-i)^n n^{2n} z^{3^n}$.

Решение. (а) Намираме R чрез формулата (2.3). Имаме, че $\dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = n + 1 \to \infty$. Следователно $R = \infty$.

[6] Ще припомним, че ако $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1 \ldots$, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$ означава най-дясната (най-горната) точка на сгъстяване на редицата $\{a_n\}$; ако $\{a_n\}$ е неограничена отгоре, приемаме, че $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n = \infty$. Ако $l = 0$ приемаме, че $R = \infty$, а ако $l = \infty$ — $R = 0$.

(б) $\dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = \dfrac{n^\alpha}{(n+1)^\alpha} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^\alpha = e^{\alpha \ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \to e^0 = 1$. От (2.3) следва, че $R = 1$.

(в) $\dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = (1 + \dfrac{1}{n})^n \to e$. Следователно $R = e$.

(г) В този случай формулата (2.3) не може да се приложи, защото не е изпълнено условието $c_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$. Затова ще използваме формулата на Коши -Адамар. Имаме, че

$$|c_\nu| = \begin{cases} 0, & \text{при } \nu \neq 3^n, \\ n^{2n}, & \text{при } \nu = 3^n. \end{cases}$$

Тогава е изпълнено

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[3^n]{n^{2n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{2n \ln n}{3^n}} = e^0 = 1.$$

Следователно $R = 1$.

Задача 2.7.3 (**Обобщен критерий на Лайбниц**[7]) *Нека $c_n \le c_{n-1}$, $c_n \to 0$ и $|z| = 1$, $z \neq 1$. Докажете, че редът $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu z^\nu$ е сходящ за всяка точка от единичната окръжност с евентуално изключение на $z = 1$.*

Решение. Полагаме $S_n(z) = \sum_{\nu=1}^n c_\nu z^\nu$. Тогава

$$(1-z)(S_{n+p}(z) - S_n(z)) = c_{n+1}z^{n+1} + \sum_{k=2}^{p}(c_{n+k} - c_{n+k-1})z^{n+k} - c_{n+p}z^{n+p+1}$$

и следователно

$$|1-z||S_{n+p}(z) - S_n(z)| \le c_{n+1} + \sum_{k=2}^{p}(c_{n+k-1} - c_{n+k}) + c_{n+p} = 2c_{n+1} \to 0.$$

От критерия на Коши за сходимост на редици заключаваме, че редът е равномерно сходящ за всяка затворена дъга от единичната окръжност, която не съдържа точката $z = 1$.

Задача 2.7.4 *Намерете за кои z е сходящ редът* $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{3n+1}}{\ln n}$.

Решение. Тъй като

$$|c_\nu| = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln n}, & \text{при } \nu = 3n+1, \\ 0, & \text{при } \nu \neq 3n+1, \end{cases}$$

то $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}} \sqrt[\nu]{|c_\nu|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3n+1]{\dfrac{1}{\ln n}}$. Нека $u_n = (\ln n)^{-\frac{1}{3n+1}}$. Тъй като $\ln u_n = \frac{\ln \ln n}{3n+1} \to 0$ при $n \to \infty$, то $u_n \to 1$. От формулата на Коши-Адамар следва, че $R = 1$.

[7]**Критерий на Лайбниц**. Нека $a_n \ge 0$, $n = 1, \ldots$ и $a_n \to 0$ монотонно намаляващи. Тогава редът $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ е сходящ.

Радиусът на сходимост може да намерим и с формулата (2.3). Записваме реда във вида

$$z \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-z^3)^n}{\ln n}. \tag{2.4}$$

Той е едновременно сходящ с реда

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{u^n}{\ln n}, \tag{2.5}$$

където $u = -z^3$. Радиусът на сходимост на реда (2.5) е $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1$. Тъй като $\dfrac{1}{\ln n}$ клони към нула монотонно намалявайки, то от обобщения критерий на Лайбниц (зад. 2.7.3) следва, че (2.5) е сходящ при $|u| = 1$ с евентуално изключение на $u = 1$. Следователно (2.4) е сходящ при $|z| = 1$ с евентуално изключение на корените на уравнението $-z^3 = 1$, т.е. $z_0 = -1$, $z_1 = e^{i\pi/3}$ и $z_2 = e^{-i\pi/3}$. Ако $-z^3 = 1$, получаваме реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$, който е разходящ (например по Раабе–Дюамел).

Отг. Абс. сходящ при $|z| < 1$.
Усл. сходящ при $|z| = 1$ с изкл. на $-1,\ e^{i\pi/3},\ e^{-i\pi/3}$.
Разходящ при $|z| > 1$.

Задача 2.7.5 *Изследвайте за сходимост следните редове:*

(а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-iz)^n$ **(б)** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \left(\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right)^n,\ \operatorname{Im}\alpha > 0,$

(в) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n^2}{z^n}\right)$ **(г)** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^{\ln n}}.$

N. B. Забележете, че редовете **(б)** и **(в)** са функционални редове, които не са степенни. Редът **(б)** става степенен след полагането $u = \dfrac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}$, като се получава редът **(а)** .

Редът **(в)** се изследва за сходимост като се раздели на сума от двата реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^2}{z^n}$. Първият от тях е степенен ред, за който $R = \infty$. Вторият също става степенен ред след полагането $u = \dfrac{1}{z}$, като за него $R = 1$.

Отг. **(а)** Абс. сх. за $|z| < 1,$ разх. за $|z| \geq 1$.
(б) Абс. сх. за $\operatorname{Im} z > 0,$ разх. за $\operatorname{Im} z \leq 0$.
(в) Абс. сх. за $|z| > 1,$ разх. за $|z| \leq 1$.
(г) Абс. сх. за $|z| \geq 1,$ разх. за $|z| < 1$.

По-долу ще разглеждаме редове от вида $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$. Те се изследват за сходимост като се разделят на сума от два реда (както в зад. 2.7.5)

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}\frac{1}{(z-z_0)^n}.$$

Първият от тях е степенен ред, а вторият става степенен след полагането $u = \dfrac{1}{z-z_0}$. Ако радиусът на сходимост на първия ред е R (т. е. областта му на сходимост е $|z-z_0| < R$), а на втория ред е r (т. е. областта му на сходимост е $|u| = \dfrac{1}{|z-z_0|} < r$), то областта на сходимост на сумата от двата реда е сечението на двете области, т. е. венецът $r < |z-z_0| < R$.

Задача 2.7.6 *Намерете областта на сходимост на следните редове:*

(а) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|}z^n$, **(б)** $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{z^n}{3^n+1}$

(в) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \dfrac{(z-1)^n}{\operatorname{ch}\alpha n}$, $\alpha > 0$. **(г)** $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin in}{(z+i)^n}$.

Упътване. (а) Полагаме $u = \dfrac{1}{z}$, след което представяме реда като сума на два степенни реда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{2^n}.$$

(б) Ако положим $u = \dfrac{1}{z}$, редът става

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{3^n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+1}u^n.$$

(в) Ако положим $u = \dfrac{1}{z-1}$, редът става

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{\operatorname{ch}\alpha n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n}{\operatorname{ch}\alpha n}.$$

Понеже е изпълнено, че

$$\frac{\operatorname{ch}\alpha(n+1)}{\operatorname{ch}\alpha n} = \frac{e^{\alpha(n+1)} + e^{-\alpha(n+1)}}{e^{\alpha n} + e^{-\alpha n}} = e^{\alpha}\frac{1+e^{-2\alpha(n+1)}}{1+e^{-2\alpha n}} \to e^{\alpha} \text{ при } n \to \infty,$$

то радиусите на сходимост и на двата реда са $R = e^{\alpha}$.

(г)

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin in|}{|\sin i(n+1)|} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^{n+1} - e^{-(n+1)}} = \frac{1}{e}.$$

Отг. **(а)** $\dfrac{1}{2} < |z| < 2$, **(б)** $1 < |z| < 3$,

(в) $e^{-\alpha} < |z-1| < e^{\alpha}$. **(г)** $e < |z+i|$.

Задача 2.7.7 *Намерете областта на сходимост на следните редове:*

$$\textbf{(а)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+i)^n z^n}, \qquad \textbf{(б)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n(z+1)^n},$$
$$\textbf{(в)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^{-n}}{(z-2-i)^n}, \qquad \textbf{(г)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+1-i)^{-n}}{n+i}.$$

Отг. **(а)** $\sqrt{2}<|z|$, **(б)** $\frac{1}{4}<|z+i|$,

(в) $\frac{1}{2}<|z-2-i|$, **(г)** $1<|z+1-i|$.

Задача 2.7.8 ♠ *Изследвайте за сходимост реда* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z(z+1)\dots(z+n)}{n!}$.

Решение. (а) Да означим общия член на реда с a_n. Тогава имаме, че

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\left|\frac{z+n+1}{n+1}\right|=\left|\frac{x+iy+n+1}{n+1}\right|=\sqrt{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^2+\left(\frac{y}{n+1}\right)^2},$$

откъдето получаваме

$$n\left(\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}-1\right)=n\left(\frac{1}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^2+\left(\frac{y}{n+1}\right)^2}}-1\right)$$
$$=\frac{n\Big(-\frac{2x}{n+1}-\frac{x^2+y^2}{(n+1)^2}\Big)}{\sqrt{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^2+\left(\frac{y}{n+1}\right)^2}\left[1+\sqrt{\left(1+\frac{x}{n+1}\right)^2+\left(\frac{y}{n+1}\right)^2}\right]}\to -x.$$

От критерия на Раабе-Дюамел следва, че при $-x>1$ редът е сходящ, а при $-x<1$ е разходящ. Ако $x=-1$, то $a_n=0$. Следователно редът е абс. сходящ при $\operatorname{Re} z\leq -1$ и разходящ при $\operatorname{Re} z>-1$.

Глава 3

Интегриране

3.1 Линеен интеграл

Нека $f(z) = u + iv$, $z = x + iy$, е непрекъсната функция в областта G и нека $\gamma \subset G$ е частично гладка ориентирана крива. **Интеграл** *от $f(z)$* **по кривата** *γ определяме като криволинеен интеграл от втори род:*

$$\int_\gamma f(z)\,dz := \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy.$$

Нека кривата е зададена с параметричните уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t_0 \le t \le t_1$. Тогава

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{t_0}^{t_1} f\big(z(t)\big)z'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} f\big(x(t) + i\,y(t)\big)\big(x'(t) + i\,y'(t)\big)\,dt.$$

Теорема на Лайбниц - Нютон. *Нека $f(z)$ притежава примитивна*[1] *в областта G и $\gamma \subset G$ е произволна крива с начална точка z_0 и крайна точка z_1. Тогава*

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz := \int_\gamma f(z)dz = \Phi(z_1) - \Phi(z_0).$$

■

Ако $f(z)$ и $\varphi(z)$ са аналитични в областта D, съдържаща точките z_0 и z_1 и $\gamma \subset G$ е произволна крива с начало z_0 и край z_1, то е в сила следната **формула за интегриране по части**

$$\int_{z_0}^{z_1} f(z)\varphi'(z)\,dz = (f(z)\varphi(z))\Big|_{z_0}^{z_1} - \int_{z_0}^{z_1} f'(z)\varphi(z)\,dz.$$

Нека $z = \varphi(w)$ изобразява взаимно-еднозначно контура γ_1 в равнината (w) върху контура γ в равнината (z). Тогава е в сила следната **формула за смяна на променливата**

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(\varphi(w))\varphi'(w)\,dw.$$

[1] Това означава, че съществува аналитична функция $\Phi : G \to \mathbb{C}$, така че $\Phi'(z) = f(z)$. В частност, ако $f(z)$ е аналитична функция в едносвързана област, то тя притежава примитивна в областта.

Задача 3.1.1 *Пресметнете интеграла*

$$I = \int_\gamma (z-1)\,dz, \ \textit{където}$$

$$\textbf{(а)}\ \gamma\,:\, z-1 = e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le \pi,$$
$$\textbf{(б)}\ \gamma \text{ е отсечката } [0,2].$$

Решение. **(а)** Имаме, че $dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi$ и следователно

$$I = i\int_0^\pi e^{2i\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{2}(e^{2i\pi}-1) = 0.$$

(б) Нека $\gamma : z = 2t,\ 0 \le t \le 1$. Следователно $dz = 2dt$, и

$$I = 2\int_0^1 (2t-1)\,dt = 2(t^2-t)\Big|_0^1 = 0.$$

Задача 3.1.2 *Пресметнете интеграла*

$$I = \int_\gamma \operatorname{Re} z\,dz, \ \textit{където}$$

(а) $\gamma\,:\,|z| = 1$ *е описана в положителна посока от т. 1 до т. 1.*
(б) γ *е отсечката* $[z_1, z_2]$.

Решение. **(а)** Имаме, че

$$z = e^{i\varphi},\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ dz = ie^{i\varphi}\,d\varphi,\ \operatorname{Re} z = \cos\varphi,$$

следователно

$$I = i\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, e^{i\varphi}\,d\varphi = \frac{i}{2}\int_0^{2\pi}(e^{2i\varphi}+1)\,d\varphi = \pi i.$$

(б) Параметричното уравнение на γ е $z = z_1 + (z_2 - z_1)t$, $0 \le t \le 1$, $dz = (z_2 - z_1)\,dt$, следователно

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 (\mathrm{Re} z_1 + (\mathrm{Re} z_2 - \mathrm{Re} z_1)t)(z_2 - z_1)\,dt \\ &= (z_2 - z_1)(\mathrm{Re} z_1 + \frac{1}{2}(\mathrm{Re} z_2 - \mathrm{Re} z_1)) \\ &= (z_1 - z_2)\frac{\mathrm{Re} z_1 + \mathrm{Re} z_2}{2}. \end{aligned}$$

Задача 3.1.3 *Пресметнете интеграла*

$$I = \int_\gamma \frac{z+2}{z}\,dz, \ \textit{където}$$

$$\textbf{(а)}\ \gamma : z = 2e^{i\varphi},\quad 0 \le \varphi \le \pi, \qquad \textbf{(б)}\ \gamma : z = 2e^{i\varphi},\quad -\pi \le \varphi \le \pi.$$

Решение. (а) Имаме, че

$$\begin{aligned} I &= \int_\gamma (1+\frac{2}{z})dz = \int_0^\pi (1+\frac{2}{2e^{i\varphi}})d(2e^{i\varphi}) \\ &= 2e^{i\varphi}\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{2ie^{i\varphi}}{e^{i\varphi}}d\varphi = -4+2\pi i. \end{aligned}$$

Отг. **(б)** $4\pi i$

Задача 3.1.4 *Пресметнете интеграла*

$$I = \int_\gamma (y - x - 3x^2 i)\, dz,$$

където γ *е отсечката* $[0, 1+i]$.

Решение. Имаме, че

$$z = (1+i)t,\ 0 \le t \le 1,\ dz = (1+i)\, dt,\ x = t,\ y = t,$$

откъдето получаваме

$$I = (1+i)\int_0^1 (t - t - 3it^2)\, dt = -3i(1+i)\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = 1 - i.$$

Задача 3.1.5 *Пресметнете интеграла*

$$\int_\gamma |z|\, dz, \ \textit{където}$$

(а) γ *е отсечката* $[-i, i]$,

(б) γ *е дясната половина на единичната окръжност, описана в посока, обратна на часовниковата стрелка.*

Решение. (а) Разглеждаме следното параметрично представяне на γ : $z = it,\ -1 \le t \le 1$. Тогава $dz = idt$ и

$$\int_\gamma |z|dz = i\int_{-1}^1 |t|dt = 2i\int_0^1 tdt = i.$$

Отг. **(б)** $2i$.

3.2 Теорема на Коши. Формула на Коши

Теорема на Коши (за едносвързана област). *Нека* $G \subset \mathbb{C}$ *е едносвързана област и* $f : G \to \mathbb{C}$ *е аналитична функция. Нека* γ_1 *и* γ_2 *са ректифицируеми криви от* G, *които имат едни и същи начални и крайни точки. Тогава*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz. \tag{3.1}$$

В частност, ако $\gamma \subset G$ е затворена крива, то

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0. \tag{3.2}$$

Доказателство чрез формулата на Грийн. Ще докажем формулата (3.2). Формулата (3.1) е директно следствие от нея.

Нека $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ са непрекъснати заедно с частните си производни $\partial P/\partial y$, $\partial Q/\partial x$. Тогава е справедлива следната формула на Грийн

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{3.3}$$

където G е вътрешността на затворената жорданова ректифицирума крива γ, обхождана в положителна посока. Ще напомним, че при доказателството на тази формула допълнително се предполага, че областта G е такава, че всяка права, успоредна на координатните оси, пресича γ в не повече от две точки, с изключение на двете крайни положения, където е възможно пресичане по праволинейна отсечка.

Нека $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ е аналитична функция в областта G и следователно функциите $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имат (непрекъснати) частни производни. Тогава от (3.3) следва, че

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy \\ &= -\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0, \end{aligned}$$

като в последното равенство използвахме уравненията на Коши – Риман. Нека подчертаем, че тук допълнително искахме непрекъснатост на частните производни, но теоремата е вярна и без това ограничение (вж. например Аргирова [1]). ∎

Теоремата на Коши може да се обобщи и за някои нееднасвързани области.

Теорема на Коши (за многосвързана област). *Нека функцията $f(z)$ е аналитична в областта G и по контура ѝ, който се състои от краен брой непресичащи се, частично гладки, затворени жорданови криви C, γ_1, $\gamma_2, \dots \gamma_n$, като C съдържа останалите във вътрешността си (фиг. 3.1). Тогава*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz,$$

където контурът на областта е положително ориентиран.[2] ∎

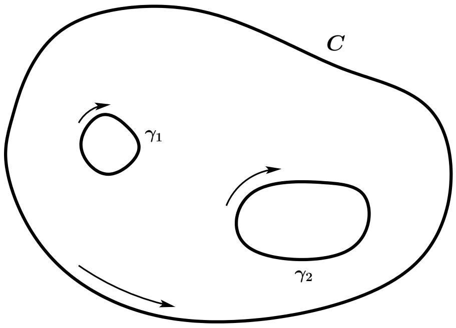
Теорема на Коши (обобщение). *Нека G е вътрешността на затворената жорданова крива γ и $f(z)$ е непрекъсната в $\overline{G}$ и аналитична в G. Тогава*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

∎

Интегрална формула на Коши. *Нека функцията $f(z)$ е аналитична в областта G и нека γ е затворена положително ориентирана жорданова*

[2]Това означава, че при обхождане на контура областта остава отляво. С други думи, C е ориентирана по посока, обратна на часовниковата стрелка, а γ_1, $\gamma_2, \dots \gamma_n$ - по посока на часовниковата стрелка.



Фиг. 3.1: Многосвързана област

крива, която заедно с вътрешността си D принадлежи на G. Тогава за всяка точка $z \in D$ е в сила следната интегрална формула на Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta. \tag{3.4}$$

При това

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\zeta,\ n = 1, 2, \dots. \tag{3.5}$$

■

Следствие. *От* (3.4) *следва, че* **всяка аналитична функция е безкрайно диференцируема**. *Ще напомним, че за да дефинираме аналитична функция наложихме изискването за съществуване само на първа производна.*

Формулите (3.5) се наричат **интегрални формули за производните** на функцията $f(z)$. Те могат да се разглеждат като получени от формулата на Коши (3.4) чрез диференциране под знака на интеграла, тъй като

$$\frac{d^n}{dz^n} \frac{1}{\zeta - z} = \frac{n!}{(\zeta - z)^{n+1}},\ n = 1, 2, \dots.$$

Доказателство на интегралната формула на Коши. Нека γ_ρ е окръжност с център т. z и радиус ρ, такава че кръгът $|\zeta - z| \le \rho$ принадлежи на D. От теоремата на Коши за областта с контур, състоящ се от кривите γ и γ_ρ, получаваме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

Следователно, за да докажем (3.4) е достатъчно да установим равенството

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta.$$

То е еквивалентно на

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2\pi i f(z) &= \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - f(z) \int_{\gamma_\rho} \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta \\ &= \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0, \end{aligned}$$

като в първото равенство използвахме зад. 3.2.1.

Тъй като $f(z)$ е непрекъсната в точката z, то за всяко $\varepsilon > 0$ можем да намерим $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\rho < \delta(\varepsilon)$, така че

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{за } z \in \gamma_\rho.$$

Тогава

$$\left| \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta \right| < \int_{\gamma_\rho} \frac{|f(\zeta) - f(z)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{\varepsilon}{\rho}.2\pi\rho = 2\pi\varepsilon.$$

Тъй като ε беше произволно избрано, то

$$\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

■

Задача 3.2.1 *Нека γ е проста затворена крива, която не минава през точката a и нека $n \in \mathbb{Z}$. Докажете, че*

$$\int_\gamma (z-a)^n\, dz = \begin{cases} 0, & \text{ако } n \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{ако } n = -1 \text{ и т. } a \text{ е във вътрешността на } \gamma. \end{cases}$$

Решение. Нека γ е окръжност γ_R с център в точката a и радиус R, т. е. $\gamma_R : z = a + Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Тогава

$$(z-a)^n = R^n e^{in\varphi},\ dz = iRe^{i\varphi} d\varphi.$$

При $n \neq -1$ имаме

$$I_n = \int_{\gamma_R} (z-a)^n\, dz = iR^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{n+1}(e^{2\pi i(n+1)} - 1) = 0.$$

Ако $n = -1$, то

$$I_{-1} = \int_{\gamma_R} \frac{dz}{z-a} = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Нека сега γ е произволна затворена крива, която не съдържа точката a. Тогава подинтегралната функция $(z-a)^n$ е аналитична както във вътрешността на γ, така и върху γ. От теоремата на Коши за едносвързана област следва, че разглежданият интеграл е равен на нула. Ако точката a е във вътрешността на γ, то можем да намерим достатъчно малко $R > 0$, така че кръгът с център в точката a и радиус R да се съдържа във вътрешността на γ. Тогава подинтегралната функция е аналитична в областта между кривите γ и γ_R. От теоремата на Коши за многосвързана област следва, че

$$\int_\gamma (z-a)^n\, dz = \int_{\gamma_R} (z-a)^n\, dz.$$

Задача 3.2.2 *Пресметнете*

$$J = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+4},$$

където γ е проста затворена крива, която не минава през точките $\pm 2i$.

Решение. Възможни са следните три случая:

(а) Нито една от точките $\pm 2i$ не е във вътрешността на γ. От теоремата на Коши за едносвързана област следва, че $J = 0$.

(б) Само една от точките $\pm 2i$ е във вътрешността на γ, например т. $2i$. Тогава от формулата на Коши получаваме

$$J = \int_\gamma \frac{\frac{1}{z+2i}}{z-2i} dz = 2\pi i \frac{1}{2i+2i} = \frac{\pi}{2}.$$

Ако т. $-2i$ се намира във вътрешността на γ, по аналогичен начин получаваме, че $J = -\dfrac{\pi}{2}$.

(в) И двете точки $\pm 2i$ са във вътрешността на γ. Нека γ_1 и γ_2 са затворени непресичащи се жорданови криви от вътрешността на γ, всяка от които съдържа във вътрешността си съответно т. $2i$ и т. $-2i$. От теоремата на Коши за многосвързана област получаваме

$$J = \int_\gamma \frac{dz}{z^2+4} = \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z^2+4} + \int_{\gamma_2} \frac{dz}{z^2+4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

Задача 3.2.3 *Като използвате формулите на Коши, пресметнете следните интеграли*

$$\textbf{(а)} \quad \int_\gamma \frac{z^2}{z-2i}\, dz, \quad \gamma : |z| = 3,$$

$$\textbf{(б)} \quad \int_\gamma \frac{dz}{z^2+9}, \quad \gamma : |z+2i| = 2,$$

$$\textbf{(в)} \quad \int_\gamma \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\, dz, \quad \gamma : x^2+y^2-2x = 0.$$

Решение. (а) Точката $z = 2i$ принадлежи на вътрешността на окръжността γ. От формулата на Коши следва,че

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z-2i}\, dz = 2\pi i (2i)^2 = -8\pi i.$$

(б) От двете точки $\pm 3i$ само $z = -3i$ принадлежи на вътрешността на окръжността γ. Следователно

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+9} = \int_\gamma \frac{\frac{1}{z-3i}}{z+3i} dz = 2\pi i \frac{1}{-6i} = -\frac{\pi}{3}.$$

(в) Кривата γ е окръжността $|z-1| = 1$. От формулата на Коши следва, че

$$\int_\gamma \frac{\sin\frac{\pi z}{4}}{z^2-1}\, dz = \int_\gamma \frac{\sin\frac{\pi z}{4}/(z+1)}{z-1}\, dz = \frac{2\pi i}{2} \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\pi i}{\sqrt{2}}.$$

Задача 3.2.4 *Като използвате формулите на Коши, пресметнете интегралите*

$$\textbf{(а)} \quad \int_\gamma \frac{e^{\pi z}\, dz}{(z^2+1)^2}, \quad \textit{където } \gamma : 4x^2+y^2-2y = 0,$$

$$\textbf{(б)} \quad \int_\gamma \frac{\sin z\, dz}{(z+2)^4}, \quad \textit{където } \gamma \textit{ е затворена крива,}$$

съдържаща във вътр. си т. $z = -2$.

Решение.

$$\textbf{(а)}\quad \int_\gamma \frac{e^{\pi z}/(z+i)^2}{(z-i)^2}dz = 2\pi i \left(\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\right)'_{z=i} = \frac{\pi(\pi i - 1)}{2}.$$

$$\textbf{(б)}\quad \int_\gamma \frac{\sin z\,dz}{(z+2)^4} = \frac{2\pi i}{3!}\frac{d^3}{dz^3}(\sin z)\bigg|_{z=-2} = -\frac{\pi i}{3}\cos 2.$$

Задача 3.2.5 *Нека* $\gamma : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a,\, b > 0$. *Като пресметнете по два различни начина* $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z}$, *докажете, че*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}.$$

Решение. От формулата на Коши следва, че $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

Елипсата γ има параметрично представяне $z = a\cos t + ib\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Тогава

$$\begin{aligned} 2\pi i &= \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin t + ib\cos t}{a\cos t + ib \sin t}dt = \int_0^{2\pi} \frac{-(a^2+b^2)\sin t\cos t + iab}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}dt \\ &= -(a^2+b^2)\int_0^{2\pi} \frac{\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}dt + iab\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}. \end{aligned}$$

От друга страна,

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t\cos t}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t}dt = 0,$$

тъй като това е интеграл от нечетна функция в симетричен интервал.[3] Следователно $I = \dfrac{2\pi}{ab}$.

Задача 3.2.6 *Пресметнете интеграла*

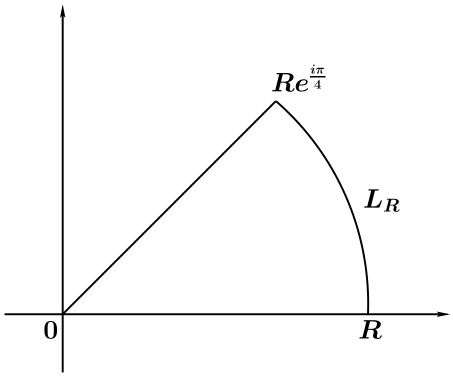
$$\int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}, \quad a \ne b,\ |a| < R,\ |b| < R.$$

Решение. Нека γ_1 и γ_2 са непресичащи се окръжности, принадлежащи на вътрешността на $|z| = R$, с центрове съответно т. a и т. b. От теоремата на Коши за многосвързана област получаваме

$$\begin{aligned} \int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)} &= \int_{\gamma_1} \frac{\frac{f(z)}{z-b}}{z-a}dz + \int_{\gamma_2} \frac{\frac{f(z)}{z-a}}{z-b}dz \\ &= 2\pi i\left(\frac{f(a)}{a-b} + \frac{f(b)}{b-a}\right) = 2\pi i \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \end{aligned}$$

Задача 3.2.7 (Теорема на Лиувил) *Ако функцията* $f(z)$ *е аналитична и ограничена в цялата равнина, то тя е константа.*

[3] Също така следва и от факта, че $I_1 = \mathrm{Re}\,(2\pi i) = 0$.



Фиг. 3.2: Областта от зад. 3.2.8

Решение. Нека a и b са произволни комплексни числа и $R > 0$ е такова, че a и b принадлежат на кръга $|z| < R$. Нека $|f(z)| \leq M$ за всяко $z \in \mathbb{C}$. Разглеждаме $I = \int_{|z|=R} \frac{f(z)\,dz}{(z-a)(z-b)}$. Имаме, че

$$|I| \leq \int_{|z|=R} \frac{|f(z)|\,|dz|}{|z-a|\,|z-b|} \leq \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)}.2\pi R.$$

Като направим граничен преход при $R \to \infty$, получаваме, че $|I| \to 0$, следователно $I \to 0$.

От друга страна, от задача 3.2.6 следва, че $I = 2\pi i \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, което не зависи от R. Следователно $I = 0$ и $f(a) = f(b)$. Числата a и b бяха произволно избрани, следователно $f(z) = \mathrm{Const}$.

По-долу, като използваме теоремата на Коши, ще пресметнем два често срещани в приложенията интеграли.

Задача 3.2.8 *Пресметнете интегралите на Френел*

$$I = \int_0^\infty \sin x^2\,dx, \quad J = \int_0^\infty \cos x^2\,dx.$$

Решение. Нека $f(z) = e^{-z^2}$. Разглеждаме областта, чийто контур се състои от отсечката $[0, R]$, $R > 0$, дъгата $L_R : z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi/4$, и отсечката $[0,\, Re^{i\frac{\pi}{4}}]$ (фиг. 3.2).

Тъй като $f(z)$ е аналитична функция, от теоремата на Коши следва, че

$$0 = \int_0^R e^{-x^2}dx + \int_{L_R} e^{-z^2}dz - \int_{[0, Re^{i\frac{\pi}{4}}]} e^{-z^2}dz = I_1 + I_2 - I_3, \tag{3.6}$$

като I_3 е със знак минус, понеже посоката на интегриране върху отсечката $[0,\, Re^{i\frac{\pi}{4}}]$ е от $Re^{i\frac{\pi}{4}}$ към 0. Първо ще пресметнем I_3. Параметричното представяне на отсечката $[0, Re^{i\frac{\pi}{4}}]$ е $z = te^{i\frac{\pi}{4}}$, $0 \leq t \leq R$. Тогава $e^{-z^2} = e^{-e^{i\frac{\pi}{2}}t^2} = e^{-it^2}$ и $dz = e^{i\frac{\pi}{4}}dt$. Следователно $I_3 = e^{i\frac{\pi}{4}} \int_0^R e^{-it^2}$. Като заместим в (3.6) и извършим граничен преход при $R \to \infty$, получаваме

$$0 = \int_0^\infty e^{-x^2}dx + \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} e^{-z^2}dz - \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^\infty (\cos t^2 - i \sin t^2)dt. \tag{3.7}$$

Ще докажем, че $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{L_R} e^{-z^2}dz = 0$. След интегриране по части получаваме

$$\int_{L_R} e^{-z^2}dz = -\frac{1}{2}\int \frac{de^{-z^2}}{z} = -\frac{e^{-z^2}}{2z}\Bigg|_R^{Re^{i\pi/4}} - \frac{1}{2}\int_{L_R} \frac{e^{-z^2}}{z^2}dz.$$

Имаме, че

$$\frac{e^{-z^2}}{2z}\Bigg|_R^{Re^{i\pi/4}} = \frac{e^{-iR^2}}{2Re^{i\pi/4}} - \frac{e^{-R^2}}{2R} \to 0 \text{ при } R\to\infty.$$

Освен това

$$\left|\int_{L_R} \frac{e^{-z^2}}{z^2}dz\right| \le \frac{\pi R}{4}\max_{L_R}\left|\frac{e^{-z^2}}{z^2}\right| = \frac{\pi R}{4}\cdot\frac{\max_{L_R}|e^{-z^2}|}{R^2}. \tag{3.8}$$

Тъй като $L_R : z = Re^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi/4$, то

$$|e^{-z^2}| = |e^{-R^2 e^{2i\varphi}}| = e^{-R^2\cos 2\varphi} \le e^{-R^2\cos\frac{\pi}{2}} = 1.$$

Тогава от (3.8) следва, че

$$\left|\int_{L_R} \frac{e^{-z^2}}{z^2}dz\right| \le \frac{\pi R}{4}\cdot\frac{1}{R^2} \to 0 \text{ при } R\to\infty.$$

От формулата за интеграла на Поасон, която за пълнота ще докажем отделно, е известно, че

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Тогава от (3.7) следва, че

$$0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}(I+J) + \frac{i}{\sqrt{2}}(I-J),$$

откъдето след приравняване на реалните и имагинерни части, получаваме

$$I = J = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

Остана да пресметнем **интеграла на Поасон**. Ще докажем, че

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Доказателство. Имаме, че

$$\int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-\xi^2-\eta^2}\,d\xi\,d\eta = \left(\int_{-R}^{R} e^{-\xi^2}\,d\xi\right)^2 = 4\left(\int_0^R e^{-\xi^2}\,d\xi\right)^2.$$

Нека в квадрата с център в началото на координатната система и страни с дължина $2R$, успоредни на координатните оси, впишем кръг k и опишем кръг K. Тогава е изпълнено, че

$$\iint_k e^{-\xi^2-\eta^2}\,d\xi\,d\eta < \int_{-R}^{R}\int_{-R}^{R} e^{-\xi^2-\eta^2}\,d\xi\,d\eta < \iint_K e^{-\xi^2-\eta^2}\,d\xi\,d\eta. \tag{3.9}$$

Сега в първия и третия интеграл на (3.9) ще направим смяна от декартови в полярни координати $\xi = \rho\cos\varphi$, $\eta = \rho\sin\varphi$. Тъй като $\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$, $d\xi\, d\eta = \rho d\rho\, d\varphi$, получаваме, че

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\varphi < 4\left(\int_0^R e^{-\xi^2}\, d\xi\right)^2 < \int_0^{2\pi}\int_0^{R\sqrt{2}} e^{-\rho^2}\rho\, d\rho\, d\varphi.$$

Като пресметнем двойните интеграли и след това коренуваме двете неравенства, получаваме

$$\sqrt{\pi(1-e^{-R^2})} < 2\int_0^R e^{-\xi^2}\, d\xi < \sqrt{\pi(1-e^{-2R^2})},$$

откъдето след граничен преход при $R \to \infty$ следва, че

$$\lim_{R\to\infty} 2\int_0^R e^{-\xi^2}\, d\xi = \sqrt{\pi} \quad \text{или} \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Глава 4

Развитие на функциите в редове

4.1 Ред на Тейлър

Теорема за развитие на аналитична функция в ред на Тейлър. *Нека $f(z)$ е аналитична функция в областта G. Нека точката $z_0 \in G$ и R е разстоянието от z_0 до контура на G. Тогава функцията $f(z)$ се развива в кръга $|z - z_0| < R$ в степенен ред от вида*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

който се нарича **ред на Тейлър** *на $f(z)$ около точката z_0. Коефициентите c_n са еднозначно определени с формулите*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!},$$

където Γ е произволна окръжност с център в точката z_0 и радиус $\rho < R$, а интегрирането се извършва в положителна посока.

Доказателство. Нека z е произволна фиксирана точка от кръга $|z - z_0| < R$. Да разгледаме концентричен кръг с център z_0 и радиус $\rho < R$, съдържащ точката z. Нека $\gamma_\rho : |\zeta - z_0| = \rho$ е границата на този кръг. Тогава от формулата на Коши (3.4) имаме

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}. \tag{4.1}$$

За да докажем теоремата е достатъчно да развием функцията $f(\zeta)/(\zeta - z)$ по степените на $z - z_0$ и след това почленно да интегрираме. Имаме

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{4.2}$$

Редът в (4.2) е равномерно сходящ относно $\zeta \in \gamma_\rho$, тъй като

$$\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} < 1.$$

Умножавайки почленно (4.2) с $f(\zeta)$, получаваме

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}}. \tag{4.3}$$

Като интегрираме почленно (4.3) и отчитайки (4.1), получаваме развитието

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\sum_{n=0}^{\infty}f(\zeta)\frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}\,d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n. \tag{4.4}$$

За да завършим доказателството, остава да покажем, че така получените коефициенти в развитието (4.4) не зависят от ρ. За това е достатъчно да отбележим, че функцията $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}$ е аналитична във всеки пръстен $\rho_1 \leq |\zeta - z_0| \leq \rho_2$, $0 < \rho_1 < \rho_2 < R$. От теоремата на Коши за многосвързана област следва, че

$$\int_{\gamma_{\rho_1}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\int_{\gamma_{\rho_2}}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

■

Непосредствено от дефинициите или чрез директно пресмятане на $f^{(n)}(0)$, получаваме следните развития в ред на Тейлър за всяко $z \in \mathbb{C}$:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\qquad e^z=\sum_{n=0}^{\infty}e^{z_0}\frac{(z-z_0)^n}{n!},$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\operatorname{sh} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad \operatorname{ch} z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Също така

$$\operatorname{Log}_0(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n},\quad |z|<1, \tag{4.5}$$

$$(1+z)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}z^n,\quad |z|<1,\qquad \text{където} \tag{4.6}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ n\end{pmatrix}=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} & n=1,2,\dots\\ 1, & n=0.\end{cases}$$

Нека f и g са аналитични функции, като

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \text{ и } g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$$

са развитията им в ред на Тейлър около точката z_0. Тогава развитието в ред на Тейлър около z_0 на функцията

$$(fg)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$$

се получава от почленното умножение на двата реда по **правилото на Коши-Мертенс**

$$c_n=a_nb_0+a_{n-1}b_1+\ldots+a_0b_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k.$$

Задача 4.1.1 *Да се докаже, че*

$$\cos\sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}.$$

Решение. От развитието на функцията $\cos z$ в ред на Тейлър директно получаваме

$$\cos\sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(\sqrt{z})^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}.$$

Задача 4.1.2 *Да се докаже, че*

$$\frac{1}{4}(e^z + e^{-z} + 2\cos z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}.$$

Решение. Последователно получаваме

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} + 2\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ &= 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}. \end{aligned}$$

Задача 4.1.3 *Докажете, че*

$$\begin{aligned} &\textbf{(а)}\ \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \quad |z|<1, \\ &\textbf{(б)}\ \frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n, \quad |z|<1, \\ &\textbf{(в)}\ \frac{z(z+a)}{(a-z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2 z^n}{a^{n+1}}, \quad |z|<|a|. \end{aligned}$$

Упътване. Използвайте, че $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad |z|<1.$

Задача 4.1.4 *Да се развият в ред на Тейлър в околност на точката $z=0$ следните рационални функции*

$$\textbf{(а)}\ \frac{1}{1+z+z^2} \qquad \textbf{(б)}\ \frac{1}{(1-z^4)(1+z+z^2+z^3)}.$$

Решение. (а) От формулата за сума на сходяща геометрична прогресия следва, че

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1-z}{1-z^3} = (1-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^{3n} = \sum_{n=0}^{\infty}(z^{3n} - z^{3n+1}).$$

(б) Имаме, че

$$\frac{1}{(1-z^4)(1+z+z^2+z^3)} = \frac{1-z}{(1-z^4)^2} = (1-z)\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}\right)^2.$$

От правилото на Коши-Мертенс следва, че

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^{4n}\right)^2 = (1+z^4+z^8+\ldots)^2 = 1+2z^4+3z^8+4z^{12}+\ldots.$$

Следователно

$$\frac{1-z}{(1-z^4)^2} = (1-z)(1+2z^4+3z^8+4z^{12}+\ldots) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(z^{4n} - z^{4n+1}).$$

Задача 4.1.5 *Като използувате развитията* (4.5) *и* (4.6), *докажете, че*

$$\textbf{(а)} \qquad \frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}, \quad |z| < 1,$$

$$\textbf{(б)} \qquad \arcsin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1,$$

$$\textbf{(в)} \qquad \mathrm{Log}_0\,(z+\sqrt{1+z^2}) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1.$$

Решение. (а) От (4.6) следва, че

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ n \end{array}\right) z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

Имаме, че

$$\left(\begin{array}{c} -\frac{1}{2} \\ n \end{array}\right) = \frac{\big(-\frac{1}{2}\big)\big(-\frac{1}{2}-1\big)\ldots\big(-\frac{1}{2}-n+1\big)}{n!} = \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!} = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Следователно

$$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} z^{2n}, \quad |z| < 1.$$

(б) Следва от факта, че $(\arcsin z)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ и от условие **(а)** след почленно интегриране.

(в) Доказва се аналогично на **(б)** , като се използва факта, че

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Log}_0\,(z+\sqrt{1+z^2}) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \quad |z| < 1.$$

Задача 4.1.6 ♠ *Да се докаже формулата*

$$\left(\frac{\operatorname{arctg} z}{z}\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2n+1}\right)\frac{z^{2n}}{n+1}, \quad |z|<1.$$

Решение. Тъй като

$$(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}, \qquad |z|<1,$$

чрез почленно интегриране получаваме

$$\frac{\operatorname{arctg} z}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n+1}, \qquad |z|<1.$$

Следователно

$$\left(\frac{\operatorname{arctg} z}{z}\right)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{2n+1}\right)^2 = c_0+c_1z+c_2z^2+\dots, \tag{4.7}$$

където

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}, \qquad a_{2k+1}=0, \qquad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2k+1}, \qquad k=0,1,\dots.$$

Функцията $\left(\frac{\operatorname{arctg} z}{z}\right)^2$ е четна, следователно $c_{2n+1}=0$, $n=0,1\dots$. Тъй като $a_{2k+1}=0$, от правилото на Коши-Мертенс последователно получаваме

$$\begin{aligned}
c_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n} a_k a_{2n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{2k}a_{2n-2k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)}\frac{(-1)^{n-k}}{(2n-2k+1)} \\
&= (-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)}\frac{1}{(2n-2k+1)} \\
&= \frac{(-1)^n}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2n-2k+1}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Като заместим (4.8) в (4.7), получаваме търсеното развитие в ред.

Задача 4.1.7 ♠ *Да се докаже, че*

$$\frac{1}{3}(e^z + 2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2}) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)!}.$$

Решение. Имаме, че

$$2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = 2e^{-\frac{z}{2}}\frac{e^{\frac{i\sqrt{3}}{2}z}+e^{-\frac{i\sqrt{3}}{2}z}}{2} = e^{z(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}+e^{-z(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}.$$

Да означим

$$\alpha = -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad \beta = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Тогава

$$2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = e^{\alpha z} + e^{-\beta z}.$$

Така получаваме

$$e^z + 2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = 3 + (1+\alpha-\beta)\frac{z}{1!} + (1+\alpha^2+\beta^2)\frac{z^2}{2!} + (1+\alpha^3-\beta^3)\frac{z^3}{3!} + \dots.$$

Лесно се вижда, че

$$1+\alpha-\beta = 0, \quad 1+\alpha^2+\beta^2 = 0, \quad 1+\alpha^3-\beta^3 = 3. \tag{4.9}$$

В общия случай

$$\begin{aligned} e^z + 2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = 3 + \sum_{n=0}^{\infty} & (1+\alpha^{1+3n} + (-1)^{1+3n}\beta^{1+3n})\frac{z^{1+3n}}{(1+3n)!} \\ & +(1+\alpha^{2+3n} + (-1)^{2+3n}\beta^{2+3n})\frac{z^{2+3n}}{(2+3n)!} \\ & +(1+\alpha^{3+3n} + (-1)^{3+3n}\beta^{3+3n})\frac{z^{3+3n}}{(3+3n)!} \quad . \end{aligned}$$

Имаме, че

$$\alpha^{3n} = e^{i\frac{2\pi 3n}{3}} = e^{2\pi n i} = 1, \quad \beta^{3n} = e^{i\frac{\pi 3n}{3}} = e^{\pi n i} = (-1)^n.$$

Следователно

$$\begin{aligned} &\alpha^{1+3n} = \alpha, \quad \alpha^{2+3n} = \alpha^2, \quad \alpha^{3+3n} = \alpha^3, \\ &(-1)^{1+3n}\beta^{1+3n} = (-1)^{1+4n}\beta = -\beta, \\ &(-1)^{2+3n}\beta^{2+3n} = (-1)^{2+4n}\beta^2 = \beta^2, \\ &(-1)^{3+3n}\beta^{3+3n} = (-1)^{3+4n}\beta^3 = -\beta^3. \end{aligned}$$

От (4.9) получаваме

$$\begin{aligned} 1+\alpha^{1+3n} + (-1)^{1+3n}\beta^{1+3n} &= 1+\alpha-\beta = 0, \\ 1+\alpha^{2+3n} + (-1)^{2+3n}\beta^{2+3n} &= 1+\alpha^2+\beta^2 = 0, \\ 1+\alpha^{3+3n} + (-1)^{3+3n}\beta^{3+3n} &= 1+\alpha^3-\beta^3 = 3. \end{aligned}$$

Тогава

$$e^z + 2e^{-\frac{z}{2}}\cos\frac{z\sqrt{3}}{2} = 3 + \sum_{n=0}^{\infty} 3\frac{z^{3+3n}}{(3+3n)!} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3n}}{(3n)!}.$$

Задача 4.1.8 ♠ *Да се докаже, че*

$$e^{z\operatorname{cotg}\alpha}\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{\sin^n\alpha}\frac{z^n}{n!}, \qquad \textit{където} \qquad 0<\alpha<\pi.$$

Решение. Имаме

$$e^{z\operatorname{cotg}\alpha}\cos z = \frac{1}{2}e^{z(\operatorname{cotg}\alpha+i)} + \frac{1}{2}e^{z(\operatorname{cotg}\alpha-i)}.$$

Полагаме

$$\begin{aligned} \beta = \operatorname{cotg}\alpha + i \quad & \Rightarrow \operatorname{tg}(\arg\beta) = \frac{1}{\operatorname{cotg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha, \quad |\beta|^2 = \operatorname{cotg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \\ & \Rightarrow \beta = \frac{1}{\sin\alpha}e^{i\alpha}, \quad \overline{\beta} = \operatorname{cotg}\alpha - i = \frac{1}{\sin\alpha}e^{-i\alpha}. \end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}e^{z\beta}+\frac{1}{2}e^{z\overline{\beta}} &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\beta^n}{n!}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\overline{\beta}^n}{n!}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sin^n\alpha}(e^{in\alpha}+e^{-in\alpha})\frac{z^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos n\alpha}{\sin^n\alpha}\,\frac{z^n}{n!}.\end{aligned}$$

4.2 Нули и изолирани особени точки

Дефиниция 1. *Нека функцията $f(z)$ е аналитична в т. $z_0 \in \mathbb{C}$. Точката z_0 е* **нула** *на $f(z)$* **от кратност n**, *ако*

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(n-1)}(z_0) = 0,\ f^{(n)}(z_0) \neq 0.$$

Ако $n = 1$, т. z_0 се нарича **проста нула**.

Теорема. *Точката z_0 е* **нула** *на $f(z)$* **от кратност n** *тогава и само тогава, когато*

$$f(z) = (z - z_0)^n\varphi(z),$$

където φ е аналитична в т. z_0 и $\varphi(z_0) \neq 0$. ∎

Дефиниция 2. *Функцията $f(z)$ е* **аналитична в безкрайната точка** *$z = \infty$, ако функцията $\varphi(w) = f(\dfrac{1}{w})$ е аналитична в точката $w = 0$.*

Например, функцията $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ е аналитична в точката $z = \infty$, тъй като функцията $\varphi(w) = f(\dfrac{1}{w}) = \sin w$ е аналитична в точката $w = 0$.

Дефиниция 3. *Точката $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ се нарича* **изолирана особена точка** *(***изолирана особеност***) за функцията $f(z)$, ако $f(z)$ е аналитична в околност на т. z_0 с изключение само на точката z_0.*

Пример. *Функцията $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$ има в безкрайност* **неизолирана** *особена точка, защото полюсите $z_k = k\pi$ на тази функция клонят към безкрайност при $k \to \infty$, следователно във всяка околност на $z = \infty$ има безбройно много други особени точки.*

Т. $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ се нарича **отстранима особеност**, *ако съществува крайна граница $\lim_{z\to z_0} f(z)$.*

Т. $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ се нарича **полюс** *за функцията $f(z)$, ако $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.*

Т. $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ се нарича **съществена особеност** *за $f(z)$, ако не съществува границата $\lim_{z\to z_0} f(z)$.* ∎

Теорема. *Т. $z_0 \in \mathbb{C}$ е* **полюс от кратност n**, *$n \geq 1$, за функцията $f(z)$ тогава и само тогава, когато z_0 е нула от кратност n за функцията $\varphi(z) = 1/f(z)$. В сила е представянето*

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad \varphi(z_0) \neq 0.$$

∎

Задача 4.2.1 *Намерете нулите на функцията* $f(z) = e^z - 1$ *и определете тяхната кратност.*

Решение. Нулите на функцията $f(z)$ са корените на уравнението $e^z = 1$. Тъй като $1 = e^{2k\pi i}$, $k \in \mathbb{Z}$, то $z_k = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$ са нулите на $f(z)$. Те са прости нули, понеже $f'(z_k) = e^{z_k} = 1 \neq 0$.

Задача 4.2.2 *Намерете нулите на функцията* $f(z) = \cos z + 1$ *и определете тяхната кратност.*

Решение. Като положим $u = e^{iz}$, уравнението $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = -1$ става $(u+1)^2 = 0$ или $e^{iz} = -1$. Следователно $z_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, са нулите на дадената функция. Те са двукратни нули, защото $f'(z_k) = -\sin z_k = 0$, $f''(z_k) = -\cos z_k = 1 \neq 0$ (или защото $u = -1$ е двукратна нула на $(u+1)^2 = 0$).

Задача 4.2.3 *Намерете нулите на функцията* $f(z) = \sin z + \cos z$ *и определете тяхната кратност.*

Решение. Имаме, че $\sin z + \cos z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0$. Като положим $u = e^{2iz}$, получаваме уравнението $u - 1 + i(u+1) = 0$, чието решение е $u = \dfrac{1-i}{1+i} = -i = e^{i(-\pi/2 + 2k\pi)}$, $k \in \mathbb{Z}$. Следователно нулите на $f(z)$ са $z_k = -\pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ и те са прости нули.

Задача 4.2.4 *Да се определи кратността на нулата* $z_0 = 0$ *за функцията*

$$f(z) = \frac{z^8}{z - \sin z}.$$

Решение. Като развием функцията $\sin z$ в ред на Тейлър в околност на т. $z_0 = 0$, получаваме

$$\begin{aligned} f(z) = &\ \frac{z^8}{z - \sin z} = \frac{z^8}{z - \left(z - z^3/3! + z^5/5! + \dots\right)} \\ = &\ \frac{z^8}{z^3/3! - z^5/5! + \dots} = z^5 \frac{1}{1/3! - z^2/5! + \dots} = z^5 \varphi(z), \end{aligned}$$

където $\varphi(z) = \dfrac{1}{1/3! - z^2/5! + \dots}$. Функцията $\varphi(z)$ е аналитична в т. $z_0 = 0$ и $\varphi(0) = 6 \neq 0$. Следователно точката $z_0 = 0$ е 5-кратна нула за дадената функция.

Може да се разсъждава и по следния начин: за функцията $f(z) = z - \sin z$ е изпълнено, че $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$ и $f'''(0) = \cos z\big|_{z=0} \neq 0$. Следователно $z = 0$ е трикратна нула на знаменателя и понеже е и нула от кратност осем за числителя, то $z = 0$ е пет-кратна нула на дадената функция.

Задача 4.2.5 *Да се намерят нулите на функцията* $f(z) = (z^2+1)^3 \operatorname{sh} z$ *и да се определи тяхната кратност.*

Решение. От $(z^2+1)^3 \operatorname{sh} z = 0$ получаваме, че или $z^2+1 = 0$, или $\operatorname{sh} z = 0$. Решавайки тези уравнения, получаваме нулите на $f(z)$:

$$z = -i, \quad z = i, \quad z_k = k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Нека $z = -i$. Тогава $f(z)$ може да се представи във вида

$$f(z) = (z+i)^3 \varphi(z),$$

където функцията $\varphi(z) = (z-i)^3 \operatorname{sh}(z)$ е аналитична в т. $z = -i$, при това $\varphi(-i) = 8i \operatorname{sh}(-i) = 16 \sin 1 \neq 0$. Следователно т. $z = -i$ е нула от кратност три. Аналогично се доказва, че т. $z = i$ също е нула от кратност три. За да определим кратността на нулите $z_k = k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$, достатъчно е да отбележим, че производната

$$f'(z) = 6z(z^2+1)^2 \operatorname{sh} z + (z^2+1)^3 \operatorname{ch} z$$

е различна от нула в точките $k\pi i,\ k \in \mathbb{Z}$. Следователно $z_k,\ k \in \mathbb{Z}$, са прости нули.

Задача 4.2.6 *Намерете нулите на следните функции и определете кратността им.*

$$\textbf{(а)}\ f(z) = 1 + \operatorname{ch} z, \quad \textbf{(б)}\ f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Отг. **(а)** двукратни нули в т. $z_k = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$,
(б) прости нули в т. $z_k = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Задача 4.2.7 *Да се докаже, че т. а е отстранима особеност за следните функции:*

$$\textbf{(а)}\ \frac{z^2-1}{z-1}, \quad a = 1, \qquad \textbf{(б)}\ \frac{z}{\operatorname{tg} z}, \quad a = 0,$$
$$\textbf{(в)}\ \frac{1-\cos z}{z^2}, \quad a = 0, \qquad \textbf{(г)}\ \operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}, \quad a = 0.$$

Решение.

(а) $$\lim_{z\to 1} \frac{z^2-1}{z-1} = \lim_{z\to 1}(z+1) = 2.$$

(б) $$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{tg} z} = \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\sin z}\cos z\right) = \lim_{z\to 0}\frac{z}{\sin z}\lim_{z\to 0}\cos z = 1.$$

(в) $$\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{z}{2}}{z^2} = \frac{1}{2}.$$

(г) $$\lim_{z\to 0}\left(\operatorname{cotg} z - \frac{1}{z}\right) = \lim_{z\to 0} \frac{z\cos z - \sin z}{z \sin z}$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{-z\sin z}{\sin z + z\cos z} = \lim_{z\to 0} \frac{-z}{1 + \frac{z}{\sin z}\cos z} = 0.$$

При решението на условие **(г)** използвахме следното

Правило на Лопитал. Ако $f(z)$ и $g(z)$ са аналитични в точката z_0 и $f(z_0) = g(z_0) = 0$, $g'(z_0) \neq 0$, то $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$.

Задача 4.2.8 *Да се докаже, че т. а е полюс за следните функции:*

(а) $\dfrac{1}{z}, \quad a = 0,$ **(б)** $\dfrac{1}{(z^2+1)^2}, \quad a = i,$

(в) $\dfrac{z^2+1}{z+1}, \quad a = \infty,$ **(г)** $\dfrac{z}{1-\cos z}, \quad a = 0,$

(д) $\dfrac{z}{(e^z-1)^2}, \quad a = 0,$ **(е)** $\operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{z}, \quad a = \infty.$

Решение. (а) Точката a е прост полюс, понеже е проста нула на знаменателя.

(б) Точката a е двукратен полюс, понеже е двукратна нула на знаменателя.

(в) $\lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{z^2+1}{z+1} = \infty.$

(г) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{1-\cos z} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{\sin z} = \infty.$

(д) $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{z}{(e^z-1)^2} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{2e^z(e^z-1)} = \infty.$

(е) $\lim\limits_{z \to \infty} \operatorname{cotg}\dfrac{\pi}{z} = \lim\limits_{z \to \infty} \dfrac{\cos\frac{\pi}{z}}{\sin\frac{\pi}{z}} = \infty.$

Задача 4.2.9 *Да се докаже, че $z = 0$ е съществена особеност за функцията*

$$f(z) = e^{\frac{1}{z^2}}.$$

Решение. Ще разгледаме поведението на функцията върху реалната и имагинерната оси. Върху реалната ос $z = x$, $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \to \infty$ при $x \to 0$. Върху имагинерната ос $z = iy$, $f(iy) = e^{-\frac{1}{y^2}} \to 0$ при $y \to 0$. Тогава границата на $f(z)$ в т. $z = 0$ не съществува. Следователно $z = 0$ е съществена особеност.

Задача 4.2.10 *Да се определи вида на особената точка $z = 0$ за функцията*

$$f(z) = \frac{1}{2 + z^2 - 2\operatorname{ch} z}.$$

Решение. Да разгледаме функцията $\varphi(z) = \dfrac{1}{f(z)} = 2 + z^2 - 2\operatorname{ch} z$. Точката $z = 0$ е полюс на функцията $f(z)$, тъй като $\varphi(0) = 0$. За да намерим кратността на тази нула, пресмятаме последователно

$$\begin{aligned}
\varphi'(z) &= 2z - 2\operatorname{sh} z, & \varphi'(0) &= 0,\\
\varphi''(z) &= 2 - 2\operatorname{ch} z, & \varphi''(0) &= 0,\\
\varphi'''(z) &= -2\operatorname{sh} z, & \varphi'''(0) &= 0,\\
\varphi^{IV}(z) &= -2\operatorname{ch} z, & \varphi^{IV}(0) &= -2 \neq 0.
\end{aligned}$$

Следователно $z = 0$ е нула от кратност четири за $\varphi(z)$, което означава, че $z = 0$ е полюс от кратност четири за $f(z)$.

4.3 Ред на Лоран

Теорема на Лоран. *Всяка функция $f(z)$, която е аналитична във венец $0 \le r < |z - z_0| < R \le +\infty$, $z_0 \in \mathbb{C}$, може да се развие в степенен ред от вида*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n,$$

който се нарича **ред на Лоран** *на $f(z)$ във венеца. Коефициентите c_n се определят еднозначно от формулите*

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)\, dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{4.1}$$

където γ е произволна окръжност с център в т. z_0, съдържаща се във венеца, а интегрирането е в положителна посока. ∎

Нека точката $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолирана особеност за функцията $f(z)$. Тогава е вярно, че:

1. *Точката z_0 е* **отстранима особеност** *за функцията $f(z) \Longleftrightarrow c_n = 0$ за всяко $n < 0$.*

2. *Точката z_0 е* **m-кратен полюс** *за функцията $f(z) \Longleftrightarrow$ лорановото ѝ развитие в околност на z_0 съдържа краен брой членове с отрицателни степени, като m е най-голямата отрицателна степен в развитието, т. е. $c_n = 0$ за $n < -m$, $c_{-m} \neq 0$.*

3. *Точката z_0 е* **съществена особеност** *за функцията $f(z) \Longleftrightarrow c_n \neq 0$ за безбройно много $n < 0$.*

Дефиниция. Ред на Лоран на функцията $f(z)$ в околност на безкрайната точка ще наричаме развитието на $f(z)$ в ред на Лоран по степените на z, който е сходящ в околност на $z = \infty$ с евентуално изключение само на тази точка.

Редът на Лоран на $f(z)$ в околността $\{z : z > R\}$ на безкрайната точка се получава от реда на Лоран за функцията $\varphi(w) = f(\dfrac{1}{w})$ във венеца $\{w : 0 < |w| < \dfrac{1}{R}\}$, в който заместваме $w = 1/z$.

Развитията на елементарните функциите e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ в ред на Тейлър около $z = 0$ могат да се разглеждат и като лоранови развития около $z = \infty$. За тези функции точката $z = \infty$ е съществена особеност, защото развитията съдържат безбройно много членове с положителни степени на z.

Теорема (за вида на особената точка в безкрайност).

1. *Ако точката $z = \infty$ е отстранима особеност за функцията $f(z)$, то лорановото развитие на $f(z)$ в околност на тази точка не съдържа членове с положителни степени на z;*

2. *Ако $z = \infty$ е полюс, то лорановото развитие на $f(z)$ съдържа краен брой членове с положителни степени;*
3. *Ако $z = \infty$ е съществена особеност, лорановото развитие на $f(z)$ съдържа безкраен брой членове с положителни степени.*

■

Задача 4.3.1 *Да се развият в ред на Лоран около т. $z = 0$ функциите*

$$\textbf{(а)}\ \frac{1}{z^2}e^{-z}, \qquad \textbf{(б)}\ \frac{1-e^{2z}}{z^4}.$$

Решение.

$$\textbf{(а)} \quad \frac{1}{z^2}e^{-z} = \frac{1}{z^2}(1 - \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots) = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!} - \frac{z}{3!} + \ldots.$$

От развитието се вижда, че т. $z = 0$ е двукратен полюс за $f(z)$.

$$\textbf{(б)} \quad \frac{1-e^{2z}}{z^4} = -\frac{1}{z^4}(2z + \frac{(2z)^2}{2!} + \ldots) = -\frac{2}{z^3} - \frac{2}{z^2} - \ldots.$$

От развитието се вижда, че т. $z = 0$ е полюс от кратност три за $f(z)$.

Задача 4.3.2 *Намерете лорановото развитие на функцията*

$$f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2} \quad \textit{в областта} \quad |z-1| > 1.$$

Решение.

$$f(z) = \frac{e^{-(z-1)}e^{-1}}{(z-1)^2} = \frac{1}{e(z-1)^2}\left(1 - \frac{z-1}{1!} + \frac{(z-1)^2}{2!} - \ldots\right) = \frac{1}{e(z-1)^2} - \frac{1}{1!e(z-1)} + \frac{1}{2!e} - \frac{z-1}{3!e} + \ldots.$$

Задача 4.3.3 *Да се развие в ред на Лоран функцията*

$$f(z) = z^2 \cos\frac{1}{z} \quad \textit{в околност на точката} \quad z = 0.$$

Отг. $\qquad f(z) = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + ...$

Задача 4.3.4 *Намерете развитията в ред на Лоран на функцията*

$$f(z) = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2}$$

в областите

(а) $1 < |z| < 2$,

(б) $|z| > 2$

(в) $|z| < 1$.

Решение. (а)

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z}(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots),$$
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots.)$$

Следователно
$$f(z) = \ldots + \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\ldots$$

(б) В тази област развитието на функцията $\dfrac{1}{z-1}$ в ред на Лоран е същото, както в **(а)** , но

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}(1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\ldots),$$

откъдето получаваме развитието

$$f(z) = \frac{1-2}{z^2}+\frac{1-2^2}{z^3}+\ldots.$$

Ще отбележим, че това е и развитието на $f(z)$ в ред на Лоран в околността $\{z : |z| > 2\}$ на ∞ точка. Тъй като $z = \infty$ е отстранима особеност за $f(z)$, развитието не съдържа членове с положителни степени на z.

(в) В указаната област имаме развитията

$$\frac{1}{z-1} = -(1+z+z^2+\ldots),$$
$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots\right),$$

откъдето получаваме

$$f(z) = -\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2^2}-1\right)z+\left(\frac{1}{2^3}-1\right)z^2+\ldots.$$

Ще отбележим, че функцията $f(z)$ е аналитична в разглежданата област и развитието ѝ в ред на Лоран съвпада с развитието ѝ в ред на Тейлър.

Задачата може да се реши и като използваме формулите (4.1).

(а) Първо ще пресметнем коефициентите c'_n в лорановото развитие на функцията $\dfrac{1}{z-1}$. От теоремата на Коши за многосвързана област следва, че $c'_n = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{(z-1)z^{n+1}}dz = I_1 + I_2$, където

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{1/z^{n+1}}{z-1}dz, \quad I_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{1/(z-1)}{z^{n+1}}dz,$$

а γ_1 и γ_2 са окръжности с достатъчно малки радиуси и с центрове съответно в точките $z = 1$ и $z = 0$. От формулата на Коши (3.4) получаваме

$$I_1 = \left.\frac{1}{z^{n+1}}\right|_{z=1} = 1.$$

По-нататък, от теоремата на Коши следва, че ако $n+1 \leq 0$, то $I_2 = 0$. Ако $n+1 > 0$, от формулите на Коши (3.5) получаваме

$$I_2 = \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z-1}\right)^{(n)}_{z=0} = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(z-1)^{n+1}}\bigg|_{z=0} = -1.$$

Следователно

$$c'_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n \leq -1, \\ 0, & \text{ако } n \geq 0. \end{cases}$$

За коефициентите c''_n в лорановото развитие на функцията $\dfrac{1}{z-2}$ по аналогичен начин получаваме

$$c''_n = \begin{cases} 0, & \text{ако } n \leq -1, \\ -\dfrac{1}{2^{n+1}}, & \text{ако } n \geq 0. \end{cases}.$$

Тогава за коефициентите c_n в лорановото развитие на функцията $f(z)$ получаваме

$$c_n = c'_n - c''_n = \begin{cases} 1, & \text{ако } n \leq -1, \\ \dfrac{1}{2^{n+1}}, & \text{ако } n \geq 0. \end{cases}$$

Забележка.

(1) *Както се вижда от зад. 4.3.4, една и съща функция може да има различни лоранови развития в различни области.*

(2) *Тъй като лорановото развитие в дадена област е единствено, няма значение как ще го получим. Не е необходимо непременно да използуваме формулите* (4.1)*, което понякога е доста сложно.*

(3) *Ако функцията е аналитична в дадена област, то развитието ѝ в ред на Лоран в тази област съвпада с развитието ѝ в ред на Тейлър.*

Задача 4.3.5 *Намерете първите четири члена в лорановото развитие около т.* $z = 0$ *на функцията* $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z^2+1)}$.

Решение. *Първи начин.* Тъй като $z = 0$ е прост полюс на функцията, трябва да намерим коефициентите c_{-1}, c_0, c_1 и c_2 в лорановото развитие. Ще използуваме формулите (4.1), където γ е произволна окръжност с център т. 0. От интегралната формула на Коши (3.4) и формулите за производните (3.5) получаваме

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z dz}{z(z^2+1)} = \left(\frac{e^z}{z^2+1}\right)_{z=0} = 1,$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z dz}{z^2(z^2+1)} = \frac{1}{1!}\left(\frac{e^z}{z^2+1}\right)'_{z=0} = 1,$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z dz}{z^3(z^2+1)} = \frac{1}{2!}\left(\frac{e^z}{z^2+1}\right)''_{z=0} = -\frac{1}{2},$$

$$c_2 = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^z dz}{z^4(z^2+1)} = \frac{1}{3!}\left(\frac{e^z}{z^2+1}\right)'''_{z=0} = -\frac{5}{6}.$$

Следователно
$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z^2 + \ldots.$$

Втори начин.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z}\, e^z \, \frac{1}{1-(-z^2)} \\ &= \frac{1}{z}\left(1 + z + z^2/2 + z^3/6 + \ldots\right)\left(1 - z^2 + z^4 - \ldots\right) \\ &= \frac{1}{z} + 1 + (-1+1/2)z + (-1+1/6)z^2 + \ldots \\ &= \frac{1}{z} + 1 - \frac{1}{2}z - \frac{5}{6}z + \ldots. \end{aligned}$$

Задача 4.3.6 *Намерете развитията в ред на Лоран на функцията*
$$f(z) = \frac{2z+1}{z^2+z-2} \quad \text{\textit{в околност на точката}} \quad z = 0.$$

Отг. **(а)** $|z| < 1,\ -\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) z^{n-1}$

(б) $1 < |z| < 2,\ \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n},$

(в) $|z| > 2,\ \frac{2}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{5}{z^3} - \frac{7}{z^4} + \ldots.$

Задача 4.3.7 *Развийте функцията* $f(z) = \dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$ *в ред на Лоран в околност на особените ѝ точки.*

Отг. **1**. $z_1 = 1, \quad f(z) = \dfrac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n,\ 0 < |z-1| < 1$

2. $z_2 = 2, \quad f(z) = \dfrac{1}{z-2} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n,\ 0 < |z-2| < 1$

Задача 4.3.8 ♠ *Докажете, че всяка точка от границата на кръга на сходимост на реда*
$$f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + \ldots$$
е особена точка.

Решение. От тъждеството
$$f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + \left(1 + (z^{2^n})^2 + (z^{2^n})^4 + \ldots\right)$$

получаваме рекурентната формула

$$f(z) = z^2 + z^4 + \ldots + z^{2^n} + f(z^{2^n}). \tag{4.2}$$

От (4.2) последователно получаваме, че при $x \to 1$ и при $z \to \zeta = \sqrt[2^n]{1}$, $n = 1, 2, \ldots$, е изпълнено $\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$ и $\lim_{z\to\zeta} f(\zeta) = \infty$. Действително, при $x \to 1$ имаме $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2^n} \to n + 1$. Следователно съществува $\delta(n) > 0$, така че при $x > 1 - \delta(n)$ (т.е. при x, достатъчно близки до 1), имаме $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2^n} > n$. Но

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2^n} > \sum_{k=0}^{n} x^{2^n} > n \Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = \infty. \tag{4.3}$$

Следователно $x = 1$ е особена точка. Сега да разгледаме точките $\sqrt[2^n]{1}$, които са разположени върху единичната окръжност във върховете на правилен 2^n - ъгълник. Нека ζ е един от тези корени и нека $z \in O\zeta$, където $O\zeta$ е радиусът, който съединява точката O с точката ζ. Тогава числото $z^{2^n} = x$ е реално и $z^{2^n} \to 1$ при $z \to \zeta$. Тогава от (4.3) следва, че $\lim_{z\to\zeta} f(z^{2^n}) = \infty$, а от (4.2) получаваме $\lim_{z\to\zeta} f(z) = \infty$. Следователно всички точки са особени, защото ако имаме регулярна точка, то ще имаме и дъга, върху която $f(z)$ е регулярна.

4.4 Резидууми

Нека т. $z_0 \in \mathbb{C}$ е изолирана особеност за функцията $f(z)$.

Дефиниция 1. Резидуум *на $f(z)$ в точката z_0 се нарича коефициентът c_{-1} пред $(z - z_0)^{-1}$ в лорановото развитие на $f(z)$ в ред около z_0, т. е.*

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz,$$

където γ е окръжност с център в т. z_0 и достатъчно малък радиус, която не съдържа във вътрешността си други особени точки. Интегрирането се извършва в положителна посока. Ще използваме и по-краткото означение $\operatorname{Res}(z_0)$, ако няма двусмисленост.

Ако z_0 е m-кратен полюс, то $\operatorname{Res}(f; z_0)$ се намира чрез формулата

$$\boldsymbol{\operatorname{Res}(f; z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \Big((z - z_0)^m f(z) \Big).}$$

Ако z_0 е прост полюс и

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}, \ \textit{където}\ \varphi(z_0) \neq 0, \quad \psi(z_0) = 0,\ \psi'(z_0) \neq 0,$$

то

$$\operatorname{Res}(f; z_0) = \lim_{z\to z_0} (z - z_0) \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Дефиниция 2. Резидуум на $f(z)$ в безкрайната точка *наричаме*

$$\operatorname{Res}(f; \infty) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma^-} f(z)\, dz,$$

където γ^- е достатъчно голяма окръжност с център точката $z = 0$, а интегрирането се извършва в отрицателна посока (т. е. по часовниковата стрелка, така че околността на точката $z = \infty$ да остава отляво).

От тази дефиниция следва, че

$$\operatorname{Res}(f;\infty) = -c_{-1},$$

където c_{-1} *е коефициента пред* $\dfrac{1}{z}$ *в лорановото развитие около* $z = \infty$.

Забележка. *За разлика от случая на крайна отстранима особеност, резидуумът на аналитична функция в случая, когато* $z = \infty$ *е отстранима особеност, може да бъде различен от нула, както се вижда от примера по-долу.*

Пример. *Точката* $z = \infty$ *е отстранима особена точка за функцията* $f(z) = \dfrac{1}{z}$, *защото* $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. *От друга страна, можем да разглеждаме* $\dfrac{1}{z}$ *като лорановото развитие на* $f(z)$ *в околност на безкрайната точка, следователно* $\operatorname{Res}(f;\infty) = -1$.

Теорема. *Ако функцията* $f(z)$ *е аналитична в* $\overline{\mathbb{C}}$ *с изключение на краен брой точки* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$, то

$$\operatorname{Res}(f;\infty) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f;a_k) = 0.$$

■

Задача 4.4.1 *Да се пресметнат*

(а) $\operatorname{Res}(\dfrac{\sin z}{z^2};0)$, **(б)** $\operatorname{Res}(e^{\frac{1}{z}};\infty)$, **(в)** $\operatorname{Res}(\dfrac{e^z}{(z-1)^2};1)$,

(г) $\operatorname{Res}(z^2\sin\dfrac{\pi}{z};\infty)$, **(д)** $\operatorname{Res}\left(\dfrac{\cos z}{z-\frac{\pi}{4}};\dfrac{\pi}{4}\right)$, **(е)** $\operatorname{Res}(e^{\frac{1}{z-1}};1)$.

Решение.

(а) $\dfrac{\sin z}{z^2} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{z}{2!} + \dfrac{z^3}{5!} - \ldots \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Res}(0) = 1.$

(б) $e^{\frac{1}{z}} = 1 + \dfrac{1}{1!z} + \dfrac{1}{2!z^2} + \ldots \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Res}(\infty) = -1.$

(в) Точката $z = 1$ е двукратен полюс. Следователно

$$\operatorname{Res}(1) = \frac{1}{1!}(e^z)'_{z=1} = e,$$

(г)
$$\begin{aligned} z^2\sin\frac{\pi}{z} &= z^2\left(\frac{\pi}{z} - \frac{\pi^3}{3!z^3} + \frac{\pi^5}{5!z^5} - \ldots\right) \\ &= \pi z - \frac{\pi^3}{3!z} + \frac{\pi^5}{5!z^3} - \ldots. \end{aligned}$$

Следователно $\operatorname{Res}(\infty) = \dfrac{\pi^3}{3!}$.

(д) Точката $z = \dfrac{\pi}{4}$ е прост полюс. Следователно

$$\mathrm{Res}\,(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{0!}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}/2,$$

(е) $$e^{\frac{1}{z-1}} = 1 + \frac{1}{1!(z-1)} + \frac{1}{2!(z-1)^2} + \ldots \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Res}\,(1) = 1.$$

Задача 4.4.2 *Да се намерят резидуумите на следните функции във всички крайни точки:*

(а) $\dfrac{1}{z+z^3}$, **(б)** $\dfrac{z^2}{1+z^4}$, **(в)** $\dfrac{z^2}{(1+z)^3}$,
(г) $\dfrac{1}{(z^2+1)^3}$, **(д)** $\dfrac{1}{(z^2+1)(z-1)^2}$, **(е)** $\mathrm{cotg}\,\pi z$.

Отг. **(а)** 1, ако $z = 0$; $-\dfrac{1}{2}$, ако $z = \pm i$,

(б) $\dfrac{1\pm i}{8\sqrt{2}}$, ако $z = e^{\mp\frac{\pi i}{4}}$; $-\dfrac{1\pm i}{8\sqrt{2}}$, ако $z = e^{\pm\frac{3\pi i}{4}}$

(в) 1, ако $z = -1$,

(г) $\mp\dfrac{3i}{16}$, ако $z = \pm i$,

(д) $-\dfrac{1}{2}$, ако $z = 1$; $\dfrac{1}{4}$, ако $z = \pm i$,

(е) $\dfrac{1}{\pi}$, ако $z = k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 4.4.3 *Намерете резидуумите в безкрайната точка на следните функции*

(а) $\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$, **(б)** $\cos\pi\left(\dfrac{z+2}{2z}\right)$, **(в)** $\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$,

(г) $\dfrac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1}$, **(д)** $\dfrac{(z^{10}+1)\cos\frac{1}{z}}{(z^5+2)(z^6-1)}$, **(е)** $z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

Решение. (а) Т. $z = \infty$ е отстранима особеност, тъй като $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Имаме, че

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\frac{1}{w}) = \frac{w^2+w^6}{1-w^6} = (w^2+w^6)(1+w^6+w^{12}+\ldots) \\ &= w^2+w^6+\ldots = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^6}+\ldots. \end{aligned}$$

Следователно $\mathrm{Res}\,(f;\infty) = 0$.

(б) Т. $z = \infty$ е отстранима особеност, тъй като $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Имаме, че

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\frac{1}{w}) = \cos(\pi w + \frac{\pi}{2}) = -\sin\pi w \\ &= -(\pi w - \frac{(\pi w)^3}{3!} + \ldots) = -\frac{\pi}{z} + \frac{\pi}{3!z^3} - \ldots. \end{aligned}$$

Следователно $\operatorname{Res}(f;\infty) = \pi$.

(в) Т. $z = \infty$ е отстранима особеност, тъй като $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Имаме, че

$$\begin{aligned}\frac{\sin\frac{1}{z}}{z-1} &= \frac{w\sin w}{1-w} = w\left(1+w+w^2+\dots\right)\left(w-\frac{w^3}{3!}+\dots\right)\\ &= w(w+w^2+\dots) = \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots.\end{aligned}$$

Следователно $\operatorname{Res}(f;\infty) = 0$.

(г) Т. $z = \infty$ е отстранима особеност, тъй като $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Имаме, че

$$\begin{aligned}\frac{\cos^2\frac{\pi}{z}}{z+1} &= \frac{w\cos^2\pi w}{1+w} = \frac{w(1+\cos 2\pi w)}{2(1+w)}\\ &= \frac{w}{2}\big(2+\frac{(2\pi w)^2}{2!}-\dots\big)(1-w+\dots)\\ &= w+\dots = \frac{1}{z}+\dots.\end{aligned}$$

Следователно $\operatorname{Res}(f;\infty) = -1$.

(д) Т. $z = \infty$ е отстранима особеност, тъй като $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Изпълнено е, че

$$\begin{aligned}f\big(\frac{1}{w}\big) &= \frac{w(1+w^{10})\cos w}{(1+2w^5)(1-w^6)})\\ &= w(1+w^{10})(1-2w^5+\dots)(1+w^6+\dots)\big(1+\frac{w^2}{2!}+\dots\big)\\ &= w+\dots = \frac{1}{z}+\dots.\end{aligned}$$

Следователно $\operatorname{Res}(f;\infty) = -1$.

(е) Т. $z = \infty$ е полюс, тъй като $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$. Имаме, че

$$\begin{aligned}z\cos^2\frac{\pi}{z} &= \frac{1}{w}\cos^2\pi w = \frac{1}{w}\left(1-\frac{(\pi w)^2}{2!}+\frac{(\pi w)^4}{4!}-\dots\right)^2\\ &= \frac{1}{w}(1-(\pi w)^2+\dots) = \frac{1}{w}-\pi^2 w+\dots = z-\frac{\pi^2}{z}+\dots.\end{aligned}$$

Следователно $\operatorname{Res}(f;\infty) = \pi^2$.

Глава 5

Теорема за резидуумите. Приложения

5.1 Пресмятане на интеграли

Теорема за резидуумите. *Нека функцията $f(z)$ е аналитична върху затворената жорданова крива γ и във вътрешността ѝ, с изключение на краен брой особени точки a_k, $k = 1, \ldots n$, лежащи във вътрешността на γ. Тогава*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}\,(f; a_k),$$

като интегрирането се извършва в положителна посока.

Задача 5.1.1 *Да се пресметне интеграла*

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z - 1}{z^2 + z}\,dz.$$

Решение. Подинтегралната функция има две особени точки, лежащи във вътрешността на окр. $|z| = 4$. Точката $z = 0$ е отстранима особеност $\Longrightarrow$ $\mathrm{Res}\,(0) = 0$. Точката $z = -1$ е прост полюс и $\mathrm{Res}\,(-1) = \dfrac{e^{-1} - 1}{-1}$. Следователно $I = 2\pi i \dfrac{e-1}{e}$.

Задача 5.1.2 *Да се пресметне интеграла*

$$\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\,dz.$$

Решение. И двете особени точки на подинтегралната функция се намират във вътрешността на $|z| = 2$. Точката $z = -1$ е прост полюс и $\mathrm{Res}\,(-1) = -e^{-1}$. Точката $z = 0$ е съществена особеност. За да намерим $\mathrm{Res}\,(0)$, ще развием функцията в ред на Лоран около $z = 0$. Имаме, че

$$\frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1} = z^3 \left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{4!z^4} + \ldots\right)(1 - z + z^2 - \ldots).$$

$\mathrm{Res}\,(0)$ е коефициентът пред $\dfrac{1}{z^4}$ в почленното умножение на двата реда. Следователно

$$\mathrm{Res}\,(0) = \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \ldots = e^{-1} - (1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}) = e^{-1} - \frac{1}{3}.$$

Тогава
$$\int_{|z|=2} \frac{z^3 e^{\frac{1}{z}}}{z+1}\, dz = 2\pi i(-e^{-1} + e^{-1} - \frac{1}{3}) = -\frac{2}{3}\pi i.$$

Задача 5.1.3 *Да се пресметне интеграла*
$$\int_{|z-i|=3/2} \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^2+1}\, dz.$$

Отг. $I = \dfrac{\pi}{e}$

Задача 5.1.4 *Пресметнете следните интеграли*

$$\text{(а) } I = \int_{|z|=2} \frac{dz}{1+z^4},$$
$$\text{(б) } I = \int_{|z|=3} \frac{z^{17}}{(z^2+2)^3(z^3+3)^4} dz,$$
$$\text{(в) } I = \int_{|z|=1} z^2 \sin\frac{1}{z}\, dz.$$

Решение. (а) *Първи начин.* Корените на уравнението $z^4 = -1$, $z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{4}}$, $k = 0, 1, 2, 3$, са прости полюси на функцията $\dfrac{1}{z^4+1}$. Те се намират във вътрешността на окръжността $|z| = 2$. Имаме, че
$$\operatorname{Res}(z_k) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{z_k}{4}.$$
Следователно
$$I = -\frac{\pi i}{2}(z_0 + z_1 + z_2 + z_3) = 0.$$

Втори начин. Тъй като $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \operatorname{Res}(z_k) = -\operatorname{Res}(\infty)$, достатъчно е да пресметнем $\operatorname{Res}(\infty)$. За целта развиваме функцията $f(z) = \dfrac{1}{1+z^4}$ в ред на Лоран в околност на безкрайната точка. Имаме, че
$$f(z) = \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{z^4}\frac{1}{1+\frac{1}{z^4}} = \frac{1}{z^4} - \frac{1}{z^8} + \frac{1}{z^{12}} + \ldots,$$
откъдето се вижда, че $\operatorname{Res}(f; \infty) = -c_{-1} = 0$. Следователно $I = 0$.

(б) Подинтегралната функция има пет полюса от кратности съответно три и четири и всичките те се намират във вътрешността на окръжността $|z| = 3$. Затова ще използваме факта, че $I = -2\pi i \operatorname{Res}(\infty)$. Ще пресметнем $\operatorname{Res}(\infty)$.
$$\begin{aligned} f(\frac{1}{w}) &= \frac{w}{(1+2w^2)^3(1+3w^3)^4} = w(1-2w^2+\ldots)(1-3w^3+\ldots) \\ &= w + \ldots = \frac{1}{z} + \ldots \\ &\Longrightarrow \operatorname{Res}(\infty) = -1 \Longrightarrow I = 2\pi i. \end{aligned}$$

(в) Точката $z = 0$ е съществена особеност. Имаме, че

$$z^2 \sin\frac{1}{z} = z^2\Big(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \dots\Big) = z - \frac{1}{3!z} + \dots$$
$$\Longrightarrow \mathrm{Res}\,(0) = -\frac{1}{6} \Longrightarrow I = -\frac{\pi i}{3}.$$

Задача 5.1.5 *Пресметнете*

$$I = \int_\gamma \frac{z^2 dz}{e^{2\pi i z^3} - 1},$$

където $\gamma : |z| = R, \quad 1 < R < \sqrt[3]{2}$.

Решение. Първо намираме нулите на знаменателя на подинтегралната функция.

$$e^{2\pi i z^3} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi i z^3 = 2k\pi i \quad \Longrightarrow \quad z^3 = k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Във вътрешността на γ лежат само нулите, които се получават при $k = 0$ и $k = \pm 1$.

$$\text{От } z^3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad z_{1,2,3} = e^{\frac{2k\pi i}{3}},\ k = 0, 1, 2.$$
$$\text{От } \quad z^3 = -1 \quad \Longrightarrow \quad z_{4,5,6} = e^{i\frac{\pi + 2k\pi}{3}},\ k = 0, 1, 2.$$

Точките $z_k,\ k = 1, \dots 6$, са трикратни полюси. При $k = 0$ получаваме $z_7 = 0$ - прост полюс. За $z_k,\ k = 1, \dots 6$ имаме, че

$$\mathrm{Res}\,(z_k) = \frac{z_k^2}{e^{2\pi i z_k^3}.2\pi i.3z_k^2} = \frac{1}{6\pi i}\cdot\frac{1}{e^{2\pi i z_k^3}} = \frac{1}{6\pi i},\ \text{тъй като } z_k^3 = \pm 1.$$

Остава да пресметнем $\mathrm{Res}\,(0)$.

$$\begin{aligned} \frac{z^2}{e^{2\pi i z^3} - 1} &= \frac{z^2}{2\pi i z^3 + \frac{(2\pi i z^3)^2}{2!} + \dots} \\ &= \frac{1}{z(2\pi i - 2\pi z^3 + \dots)} = \frac{1}{z}\varphi(z), \end{aligned}$$

където функцията $\varphi(z)$ е холоморфна в околност на т. 0 и $\varphi(0) = \dfrac{1}{2\pi i}$. Следователно $\mathrm{Res}\,(0) = \dfrac{1}{2\pi i}$. Окончателно получаваме

$$I = 2\pi i\Big(\frac{1}{2\pi i} + 6\frac{1}{6\pi i}\Big) = 3.$$

Задача 5.1.6 ♠ *Като пресметнете границата*

$$\textbf{(а)}\ \lim_{b\to\infty}\int_{\Gamma_b}\frac{z dz}{2 - e^{-iz}}, \qquad \textbf{(б)}\ \lim_{b\to\infty}\int_{\Gamma_b}\frac{z dz}{4 - e^{-iz}},$$

където контурът Γ_b *е правоъгълникът с върхове* π, $\pi + ib$, $-\pi + ib$ *и* $-\pi$, *намерете стойността на интеграла*

$$\textbf{(а)}\ \int_0^\pi \frac{t\sin t dt}{5 - 4\cos t}, \qquad \textbf{(б)}\ \int_0^\pi \frac{t \sin t dt}{17 - 8\cos t}.$$

Решение. Нека $a > 1$. Особените точки на функцията $\dfrac{z}{a - e^{-iz}}$ са точките $z_k = i \ln a - 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, които са прости полюси. От тях във вътрешността на кривата Γ_b се намира само $z_0 = i \ln a$. От теоремата за резидуумите имаме, че

$$I = \int_{\Gamma_b} \frac{z dz}{2 - e^{-iz}} = 2\pi i \operatorname{Res}(i \ln a) = 2\pi i \frac{\ln a}{a}. \tag{5.1}$$

От друга страна,

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} I &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t dt}{a - e^{-it}} + i\left(\int_0^{\infty} \frac{(\pi + it) dt}{a - e^{-i(\pi+it)}} - \int_0^{\infty} \frac{(-\pi + it) dt}{a - e^{-i(-\pi+it)}} \right) \\
&\quad + \lim_{b\to\infty} \int_{\pi+ib}^{-\pi+ib} \frac{t dt}{a - e^{-it}} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t dt}{a - e^{-it}} + 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{dt}{a + e^t} + \lim_{b\to\infty} \int_{\pi+ib}^{-\pi+ib} \frac{t dt}{a - e^{-it}}. \qquad (5.2)
\end{aligned}$$

Първо ще пресметнем двата интеграла в (5.2). За първия от тях имаме, че

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t dt}{a - e^{-it}} &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t dt}{a - \cos t + i \sin t} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t(a - \cos t)}{1 + a^2 - 2a \cos t} dt - i \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + a^2 - 2a \cos t} dt.
\end{aligned}$$

Първият интеграл в последното равенство е равен на нула, защото е интеграл от нечетна функция в симетричен интервал. Следователно

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{t dt}{a - e^{-it}} = -2i \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + a^2 - 2a \cos t} dt.$$

За втория интеграл в (5.2) получаваме, че

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{a + e^t} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} dt}{a e^{-t} + 1} = -\frac{1}{a} \ln(a e^{-t} + 1) \Big|_0^{\infty} = \frac{\ln(1 + a)}{a}.$$

Сега ще докажем, че границата в (5.2) е нула. Последователно получаваме

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\pi+ib}^{-\pi+ib} \frac{t dt}{a - e^{-it}} = \int_{\pi}^{-\pi} \frac{t + ib}{a - e^{b - it}} dt \\
&= \frac{b}{e^b} \int_{\pi}^{-\pi} \frac{\frac{t}{b} + i}{a e^{-b} - e^{-it}} dt.
\end{aligned}$$

Следователно

$$|I| \le \frac{b}{e^b} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\left| \frac{t}{b} + i \right|}{|a e^{-b} - e^{-it}|} dt \le \frac{b}{e^b} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\pi^2}{b^2} + 1}}{1 - a e^{-b}} \cdot 2\pi \to 0 \text{ при } b \to \infty,$$

откъдето получаваме, че $I \to 0$ при $b \to \infty$. Тогава от (5.1) и (5.2) следва, че

$$J := \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + a^2 - 2a \cos t} dt = \frac{\pi}{a} \ln \frac{1 + a}{a}.$$

Като заместим с $a = 2$ и $a = 4$ съответно в случаите **(a)** и **(б)**, получаваме

$$\textbf{(a)}\ J = \frac{\pi}{2} \ln \frac{3}{2}, \qquad \textbf{(б)}\ J = \frac{\pi}{4} \ln \frac{5}{4}.$$

Задача 5.1.7 *Пресметнете*

$$\int_{C_n:|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z} dz.$$

Решение. Подинтегралната функция има прости полюси в точките $z = k$, $k = \pm 1, \dots, \pm n$ и двукратен полюс в точката $z = 0$. От теоремата за резидуумите следва, че

$$\int_{C_n:|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z} dz = 2\pi i \Bigg(\sum_{k=-n,\, k\neq 0}^{n} \operatorname{Res}(k) + \operatorname{Res}(0) \Bigg).$$

Първо ще намерим $\operatorname{Res}(k)$.

$$\operatorname{Res}(k) = \frac{\frac{\cos \pi z}{z}}{(\sin \pi z)'}\Bigg|_{z=k} = \frac{\frac{\cos \pi z}{z}}{\pi \cos \pi z}\Bigg|_{z=k} = \frac{1}{\pi k}.$$

Сега ще намерим $\operatorname{Res}(0)$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(0) &= \lim_{z\to 0} \big(z \operatorname{cotg} \pi z \big)' = \lim_{z \to 0} \big(\operatorname{cotg} \pi z - \frac{\pi z}{\sin^2 \pi z} \big) \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{\frac{1}{2} \sin 2\pi z - \pi z}{\sin^2 \pi z} = 0. \end{aligned}$$

Тогава

$$\int_{C_n:|z|=n+\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z} dz = 0.$$

5.2 Интеграли от вида $\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt$

В случая $R(x, y)$ *е рационална функция на* x *и* y. *Интеграли от този вид се решават чрез като положим* $z := e^{it}$. *Тогава*

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \frac{z^2 - 1}{2iz}$$

и

$$dz = e^{it} i dt \quad \Longrightarrow \quad dt = \frac{dz}{iz}.$$

Очевидно $|z| = 1$, *когато* $0 \le t \le 2\pi$. *Да означим*

$$F(z) := R\bigg(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz} \bigg) \frac{1}{iz}.$$

Тогава

$$I = \int_{|z|=1} F(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(F; a_k),$$

където a_k, $k = 1, \dots n$ *са всичките полюси на* F, *лежащи във вътрешността на единичната окръжност.*

Задача 5.2.1 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}.$$

Решение. Като положим $z = e^{it}$, получаваме

$$I = \int_{C:|z|=1} \frac{dz}{iz\left(2 + \frac{z^2+1}{2z}\right)} = \frac{2}{i} \int_{C:|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}.$$

От двата полюса $z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ в единичния кръг се намира само z_1. Следователно

$$I = 2\pi i \,\frac{2}{i}\, \mathrm{Res}\,(z_1) = 4\pi \frac{1}{z_1 - z_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Задача 5.2.2 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(a + b\cos t)^2}, \quad a > b > 0.$$

Решение. Като положим $z = e^{it}$, получаваме

$$I = \frac{4}{i} \int_{C:|z|=1} \frac{z\, dz}{(bz^2 + 2az + b)^2}.$$

Лесно се проверява, че при условието $a > b > 0$, от двата полюса на подинтегралната функция,

$$z_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - b^2}}{b},$$

в единичния кръг се намира само z_1. Резидуумът в този полюс пресмятаме по формулата

$$\mathrm{Res}\,(z_1) = \left(\frac{z}{b^2(z - z_2)^2}\right)'_{z=z_1} = \frac{a}{4}(a^2 - b^2)^{-3/2}.$$

От теоремата за резидуумите получаваме, че

$$I = \frac{4}{i}\, 2\pi i \mathrm{Res}\,(z_1) = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

Задача 5.2.3 *Да се пресметне интеграла*

$$\int_0^{\pi} \mathrm{cotg}\,(t - a)\, dt, \quad \mathrm{Im}\, a > 0.$$

Решение. Полагаме $e^{2i(t-a)} = z$. Тогава $dt = \dfrac{dz}{2iz}$ и

$$\mathrm{cotg}\,(t - a) = i\frac{e^{i(t-a)} + e^{-i(t-a)}}{e^{i(t-a)} - e^{-i(t-a)}} = \frac{i(z+1)}{z-1}.$$

Нека $a = \alpha + i\beta$, $\beta > 0$. Тогава $z = e^{2i(t-\alpha)}e^{2\beta}$. Когато $0 \le t \le \pi$, имаме, че $|z| = e^{2\beta} > 1$. Следователно

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \mathrm{cotg}\,(t - a)\, dt &= \frac{1}{2} \int_{|z|=e^{2\beta}} \frac{z+1}{z(z-1)} dz \\ &= \pi i\big(\mathrm{Res}\,(0) + \mathrm{Res}\,(1)\big) = \pi i(-1 + 2) = \pi i.\end{aligned}$$

Задача 5.2.4 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t}{5 - 4\cos 2t} dt.$$

Решение. Като изразим подинтегралната функция чрез $\cos t$ и положим $z = e^{it}$, след известни преобразувания получаваме

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t\,(4\cos^2 t - 3)^2}{9 - 8\cos^2 t} dt \\ &= -\frac{1}{4i} \int_{|z|=1} \frac{(z^2+1)^2(z^4 - z^2 + 1)^2}{z^5(2z^2-1)(z^2-2)} dz. \end{aligned} \tag{5.1}$$

От всичките полюси на подинтегралната функция $f(z)$ в (5.1), във вътрешността на $|z| = 1$ се намират точката 0 - петкратен полюс и точките $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ - прости полюси. Изпълнено е, че

$$\mathrm{Res}\,(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \mathrm{Res}\,(-\frac{1}{\sqrt{2}}) = -\frac{27}{16}.$$

За да пресметнем $\mathrm{Res}\,(0)$, ще използваме лорановото развитие на $f(z)$ около т. $z = 0$. Имаме, че

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{(z^2+1)^2(z^4-z^2+1)^2}{2z^5} \cdot \frac{1}{1-2z^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z^2}{2}} \\ &= \frac{1}{2z^5}(1 + 2z^2 + z^4)(1 - 2z^2 + 3z^4 - 2z^6 + z^8) \\ &\quad (1 + 2z^2 + 4z^4 + \ldots)(1 + \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4} + \ldots) \\ &= \frac{1}{2z^5}(1 + 2z^6 + \ldots)(1 + \frac{5}{2}z^2 + \frac{21}{4}z^4 + \ldots) \\ &= \frac{1}{2z^5}(1 + \frac{5}{2}z^2 + \frac{21}{4}z^4 + \ldots). \end{aligned}$$

Следователно $\mathrm{Res}\,(0) = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{21}{4} = \dfrac{21}{8}$. Окончателно получаваме

$$I = -\frac{1}{4i}\, 2\pi i (\frac{21}{8} - \frac{27}{8}) = \frac{3\pi}{8}.$$

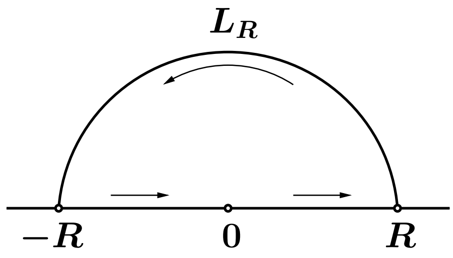
5.3 Несобствени интеграли от рационални функции

Нека $F(z) = P(z)/Q(z)$ *е рационална функция, която няма реални полюси и такава, че*

$$\deg Q \geq \deg P + 2, \tag{5.1}$$

където с $\deg P$ *означаваме степента на полинома* P*. Условието* (5.1) *е достатъчно условие за абсолютната сходимост на реалния несобствен интеграл* $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx$*. Ще докажем, че*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1, \mathrm{Im}\, a_k > 0}^{n} \mathrm{Res}\,(F; a_k),$$



Фиг. 5.1: Контурът γ

където $a_1, \ldots, a_n$ са всички полюси на F, намиращи се в горната полуравнина.

Доказателство. *Разглеждаме* $\int_\gamma F(z)dz$, *където γ се състои от отсечката $[-R, R]$ от реалната ос и полуокръжността $L_R : z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$, $R > 0$ (фиг. 5.1).*

Ако R е достатъчно голямо, всички особени точки на $F(z)$, лежащи в горната полуравнина, се намират във вътрешността на γ. От теоремата за резидуумите следва, че

$$\int_{-R}^{R} F(x)dx + \int_{L_R} F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1, \operatorname{Im} a_k > 0}^{n} \operatorname{Res}(F; a_k).$$

След граничен преход при $R \to \infty$ получаваме

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} F(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1, \operatorname{Im} a_k > 0}^{n} \operatorname{Res}(F; a_k). \tag{5.2}$$

Сега ще докажем, че

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} F(z)dz = 0.$$

Нека

$$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = z^n\left(1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_0}{z^n}\right),$$

$$Q(z) = z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0 = z^m\left(1 + \frac{b_{m-1}}{z} + \ldots + \frac{b_0}{z^m}\right),$$

където $m - n \geq 2$. Да означим

$$A := \max\{1, |a_{n-1}|, \ldots, |a_1|, |a_0|\}, \quad B := \max\{|b_{m-1}|, \ldots, |b_1|, |b_0|\}.$$

Нека $|z| \geq 2nA$. Тогава е изпълнено, че

$$\left|\frac{a_{n-k}}{z^k}\right| \leq \frac{A}{|z|^k} \leq \frac{A}{|z|} \leq \frac{1}{2n}.$$

Аналогично $\left|\frac{b_{m-k}}{z^k}\right| \leq \frac{1}{2n}$ *за $|z| \geq 2mB$.*

От неравенството на триъгълника следва, че

$$|P(z)| \leq |z|^n\left(1 + \left|\frac{a_{n-1}}{z}\right| + \ldots + \left|\frac{a_0}{z^n}\right|\right) \leq |z|^n\big(1 + \frac{1}{2n} + \ldots + \frac{1}{2n}\big) = \frac{3}{2}|z|^n,$$

$$|Q(z)| \geq |z|^m\left(1 - \left(\left|\frac{b_{m-1}}{z}\right| + \ldots + \left|\frac{b_0}{z^m}\right|\right)\right) \geq |z|^n\big(1 - \frac{1}{2m} - \ldots - \frac{1}{2m}\big) = \frac{1}{2}|z|^m.$$

Следователно

$$|F(z)| = \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} \leq \frac{3}{|z|^{m-n}}$$

за достатъчно големи n. *Тогава е изпълнено, че*

$$\begin{aligned} \left| \int_{L_R} F(z)dz \right| &\leq \int_{|z|=R} |F(z)||dz| \leq \int_{|z|=R} \frac{3}{|z|^{m-n}}|dz| \\ &\leq \frac{3}{R^2} 2\pi R \to 0 \text{ \textit{при} } R \to \infty. \end{aligned}$$

Сега от (5.2) *следва, че*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) = 2\pi i \sum_{k=1, \operatorname{Im} a_k > 0}^{n} \operatorname{Res}(F; a_k).$$

■

Задача 5.3.1 *Да се пресметнат интегралите*

(а) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+1)(x^2+9)}$ **(б)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2}$

(в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,dx$ **(г)** $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3}$

(д) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,dx}{(x^2+4ix-5)^2}$

Решение. (а) Разглеждаме функцията $F(z) = \dfrac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)}$ и контура γ от фиг. 5.1. Функцията има четири прости полюса $\pm i$ и $\pm 3i$, от които само i и $3i$ се намират в горната полуравнина. Следователно

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx &= 2\pi i \left(\operatorname{Res}(i) + \operatorname{Res}(3i)\right) \\ &= 2\pi i \left(-\frac{1}{16}i + \frac{3}{16}i\right) = 2\pi i \cdot \frac{1}{8i} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

N. B. За стойността на **реалния** несобствен интеграл получихме **реално** число!

(б) Функцията $F(z) = \dfrac{1}{z^2-2iz-2}$ има два прости полюса $z_{1,2} = i \pm 1$, които се намират в горната полуравнина. Тъй като

$$\operatorname{Res}(i \pm 1) = \frac{1}{2z-2i}\bigg|_{z=i\pm 1} = \pm\frac{1}{2},$$

то

$$\int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2ix-2} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(i+1) + \operatorname{Res}(i-1)\right) = 0.$$

(в) Функцията $F(z) = \dfrac{z^2+1}{z^4+1}$ има четири прости полюса. Това са корените на уравнението $z^4 = -1$. От тях в горната полуравнина се намират само $z_1 = e^{\frac{i\pi}{4}}$ и $z_2 = e^{\frac{i3\pi}{4}}$. Имаме, че

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1} = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(z_1) + \operatorname{Res}(z_2)\right).$$

Тъй като $\operatorname{Res}(z_{1,2}) = \dfrac{z_{1,2}^2+1}{4z_{1,2}^3}$, получаваме, че

$$\operatorname{Res}(z_1) = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}+1}{4e^{\frac{i3\pi}{4}}} = \frac{i+1}{\frac{4}{\sqrt{2}}(i-1)} = -\frac{\sqrt{2}i}{4},$$

$$\operatorname{Res}(z_2) = \frac{e^{\frac{i3\pi}{2}}+1}{4e^{\frac{i9\pi}{4}}} = \frac{-i+1}{\frac{4}{\sqrt{2}}(i+1)} = -\frac{\sqrt{2}i}{4}.$$

Следователно $I = 2\pi i \dfrac{-2\sqrt{2}i}{4} = \pi\sqrt{2}$.

(г) Тъй като подинтегралната функция е четна, то

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3} &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \pi i \operatorname{Res}(i) \\ &= \frac{\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)''_{z=i} = \pi i \frac{6}{(2i)^5} = \frac{3\pi}{16}.\end{aligned}$$

(д) Функцията $\dfrac{z^2}{(z^2+4iz-5)^2}$ има два двукратни полюса, които са корени на уравнението $(z^2+4iz-5)^2 = 0$. Това са $z_{1,2} = -2i \pm 1$, които се намират в долната полуравнина. Следователно $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2\,dx}{(x^2+4ix-5)^2} = 0$.

Задача 5.3.2 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Последователно получаваме

$$\begin{aligned} I = \frac{1}{2}\cdot 2\pi i \operatorname{Res}(i) &= \frac{\pi i}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\frac{1}{(z+i)^n}\bigg|_{z=i} \\ &= \frac{\pi i}{(n-1)!}\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-(n-2))}{(2i)^{2n-1}} \\ &= \frac{\pi i}{(n-1)!}\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)\cdots(2n-2)}{2^{2n-1}\,i^{2n-2}\,i} \\ &= \pi\frac{(2n-2)!}{\left((n-1)!\right)^2 2^{2n-1}} = \frac{(2n-2)!}{\left((2n-2)!!\right)^2}\cdot\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Задача 5.3.3 ♠ *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^\infty \frac{x^{2p}-x^{2q}}{1-x^{2r}}\,dx,$$

където p, q и r са естествени числа, такива че $p < r$ и $q < r$.

Решение. Разглеждаме функцията

$$F(z) = \frac{z^{2p}-z^{2q}}{1-z^{2r}}.$$

Тъй като степентта на знаменателя $2r$ е с поне две единици по - голяма от степента на числителя, то I е сходящ интеграл. Полюсите на $F(z)$ са точките

$$z_k = e^{\frac{k\pi i}{r}}, \quad k = 1, \ldots, r-1, r+1, \ldots, 2r-1,$$

(точките $+1$ и -1 не са полюси на $F(z)$, тъй като числителят и знаменателят имат общ множител $1 - z^2$). От всички полюси в горната полуравнина се намират

$$z_k = e^{\frac{k\pi i}{r}}, \quad k = 1, \ldots, r-1.$$

Те са прости полюси, следователно

$$\mathrm{Res}\,(z_k) = \frac{e^{\frac{k\pi i}{r}2p} - e^{\frac{k\pi i}{r}2q}}{-2re^{\frac{k\pi i}{r}(2r-1)}} = \frac{1}{2r}\left(e^{(2q+1)\frac{k\pi i}{r}} - e^{(2p+1)\frac{k\pi i}{r}}\right).$$

От теоремата за резидуумите следва, че

$$2I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2p} - x^{2q}}{1 - x^{2r}}\, dx = \frac{\pi i}{r}\sum_{k=1}^{r-1}\left(e^{(2q+1)\frac{k\pi i}{r}} - e^{(2p+1)\frac{k\pi i}{r}}\right).$$

Като приложим формулата за геометрична прогресия, последователно получаваме

$$\begin{aligned}
2I &= \frac{\pi i}{r}\left(\frac{e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}} - e^{(2q+1)\pi i}}{1 - e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}} - i\frac{e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}} - e^{(2p+1)\pi i}}{1 - e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}}\right) \\
&= \frac{\pi}{r}\left(i\frac{e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}} + 1}{1 - e^{(2q+1)\frac{\pi i}{r}}} - i\frac{e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}} + 1}{1 - e^{(2p+1)\frac{\pi i}{r}}}\right) \\
&= \frac{\pi}{r}\left(-i\frac{e^{(2q+1)\frac{\pi i}{2r}} + e^{-(2q+1)\frac{\pi i}{2r}}}{e^{(2q+1)\frac{\pi i}{2r}} - e^{-(2q+1)\frac{\pi i}{2r}}} + i\frac{e^{(2p+1)\frac{\pi i}{2r}} + e^{-(2p+1)\frac{\pi i}{2r}}}{e^{(2p+1)\frac{\pi i}{2r}} - e^{-(2p+1)\frac{\pi i}{2r}}}\right) \\
&= \frac{\pi}{r}\left(\mathrm{cotg}\,\frac{2p+1}{2r}\pi - \mathrm{cotg}\,\frac{2q+1}{2r}\pi\right).
\end{aligned}$$

Тъй като подинтегралната функция е четна, получаваме, че

$$I = \frac{\pi}{2r}\left(\mathrm{cotg}\,\frac{2p+1}{2r}\pi - \mathrm{cotg}\,\frac{2q+1}{2r}\pi\right).$$

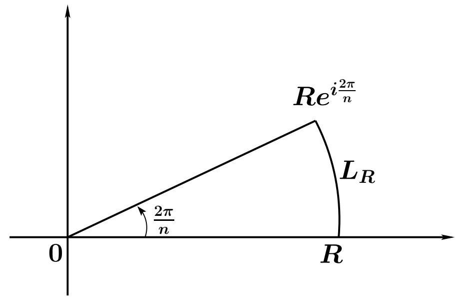
Задача 5.3.4 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n}\, dx, \ n \in \mathbb{N}.$$

Решение. Нека $f(z) = \dfrac{1}{1+z^n}$. Разглеждаме областта, чийто контур γ се състои от отсечката $[0, R]$, $R > 1$, дъгата $L_R : z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi/n$, и отсечката $[0,\, te^{i\frac{2\pi}{n}}]$, $0 \leq t \leq R$ (фиг. 5.2).

Полюсите на $f(z)$ са корените на уравнението $z^n = -1$, т. е. $z_k = e^{\frac{i(2k+1)\pi}{n}}$, $k = 0, \ldots, n-1$. От тях в разглежданата област се намира само $z_0 = e^{\frac{i\pi}{n}}$. От теоремата за резидуумите следва, че

$$\int_0^R \frac{1}{1+x^n}\, dx + \int_{L_R} f(z)dz - \int_0^R \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}}}{1+t^n}dt = 2\pi i \mathrm{Res}\,(e^{\frac{i\pi}{n}}),$$



Фиг. 5.2: Контурът γ

като третият интеграл е със знак минус, понеже сме сменили посоката на интегриране, която е от $Re^{i\frac{2\pi}{n}}$ към 0. След граничен преход при $R \to \infty$ получаваме

$$(1 - e^{i\frac{2\pi}{n}})I = 2\pi i \mathrm{Res}\,(e^{\frac{i\pi}{n}}) = 2\pi i \frac{1}{nz^{n-1}}\bigg|_{z=e^{\frac{i\pi}{n}}},$$

откъдето следва, че

$$e^{\frac{i\pi}{n}}\,2i(-\sin\frac{\pi}{n})I = 2\pi i\,\frac{1}{-ne^{-\frac{i\pi}{n}}},$$

или

$$I = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

5.4 Интеграли от вида $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{i\lambda x}\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos\lambda x\,dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin\lambda x\,dx$

В случая $F(z) = P(z)/Q(z)$ *е рационална функция, която няма реални полюси,* $\deg Q \geq \deg P + 1$ *и* $\lambda > 0$.

При пресмятането на тези интеграли ще използваме следната

Лема на Жордан. *Нека* $\Phi(z)$ *е функция, която е аналитична в горната полуравнина* $\{z : \mathrm{Im}\, z > 0\}$*, с изключение на краен брой особени точки, и която клони към нула при* $z \to \infty$*. Тогава е изпълнено, че*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} \Phi(z)e^{i\lambda z}\,dz = 0,$$

където $L_R := \{z : |z| = R,\ \mathrm{Im}\, z \geq 0\}$ *и* $\lambda > 0$.

Доказателство. *Да означим*

$$J_R = \int_{L_R} \Phi(z)e^{i\lambda z}\,dz,$$

където $L_R : z = Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$*. Тогава*

$$\begin{aligned} |J_R| &= \left| \int_0^\pi e^{\lambda i R\cos\varphi - \lambda R\sin\varphi}\Phi(Re^{i\varphi})iRe^{i\varphi}\,d\varphi \right| \\ &\leq \int_0^\pi e^{-\lambda R\sin\varphi}|\Phi(Re^{i\varphi})|R\,d\varphi. \end{aligned}$$

По условие $|\Phi(Re^{i\varphi})| = \varepsilon(R) \to 0$ *при* $R \to \infty$. *Следователно*

$$|J_R| \leq \varepsilon(R) \int_0^{\pi} R\, e^{-\lambda R \sin\varphi}\, d\varphi.$$

За да оценим интеграла в дясната страна, първо ще отбележим, че графиката на функцията $e^{-\lambda R \sin\varphi}$ *е симетрична относно* $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, *следователно*

$$\int_0^{\pi} e^{-\lambda R \sin\varphi}\, d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda R \sin\varphi}\, d\varphi.$$

Ще използваме и неравенството

$$\frac{\sin x}{x} \geq \frac{2}{\pi}, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

което се доказва като разгледаме функцията $g(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$. *Изпълнено е, че* $g(0) = g(\pi/2) = 0$ *и* $g''(x) \leq 0$, *т. е. функцията* g *е вдлъбната* $\Rightarrow$ $f(x) \leq 0$. *Тогава за* J_R *получаваме*

$$\begin{aligned} |J_R| &\leq 2\varepsilon(R) \int_0^{\frac{\pi}{2}} R\, e^{-\frac{2}{\pi}\lambda R\, \varphi}\, d\varphi = \frac{\pi\varepsilon(R)}{\lambda}(1 - e^{-\lambda R}) \\ &< \frac{\pi\varepsilon(R)}{\lambda} \to 0 \text{ при } R \to \infty. \end{aligned}$$

■

За да пресметнем интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{i\lambda x}\,dx$ *ще приложим теоремата за резидуумите за функцията* $f(z) = F(z)e^{i\lambda z}$ *и областта с контур* γ *от фиг. 5.1. Имаме, че*

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{L_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1, \operatorname{Im} a_k > 0}^{n} \operatorname{Res}(f; a_k).$$

След граничен преход при $R \to \infty$ *получаваме*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1, \operatorname{Im} a_k > 0}^{n} \operatorname{Res}(f; a_k).$$

От лемата на Жордан следва, че $\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)dz = 0$. *Тогава*

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{i\lambda x}dx = 2\pi i \sum_{k=1, \operatorname{Im} a_k > 0}^{n} \operatorname{Res}\big(F(z)e^{i\lambda z}; a_k\big).$$

Забележка. *Интеграли от вида*

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos\lambda x\, dx, \;\; I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\sin\lambda x\, dx$$

се пресмятат като първо пресметнем интеграла $I = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{i\lambda x}\,dx$. *От формулата на Ойлер следва, че* $I = I_1 + i\, I_2$. *Тогава*

$$I_1 = \operatorname{Re} I \quad I_2 = \operatorname{Im} I.$$

Задача 5.4.1 *Да се пресметнат интегралите*

$$\textbf{(а)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}\,dx}{x^2-2x+2}, \quad \textbf{(б)}\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2-2ix-2}.$$

Решение. Функцията $f(z) = \dfrac{(z-1)e^{iz}}{z^2-2z+2}$ има два прости полюса $1 \pm i$, от които само $1+i$ се намира в горната полуравнина. Следователно

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{ix}\,dx}{x^2-2x+2} = 2\pi i \operatorname{Res}(1+i).$$

Имаме, че

$$\operatorname{Res}(1+i) = \left.\frac{(z-1)e^{iz}}{(z^2-2z+2)'}\right|_{z=1+i} = \frac{e^{i(1+i)}}{2}.$$

Следователно $I = \pi i\, e^{-1+i} = \dfrac{\pi i}{e}(\cos 1 + i \sin 1)$.

(б) Функцията $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2-2iz+2}$ има два прости полюса $i \pm 1$, намиращи се в горната полуравнина. Следователно

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}\,dx}{x^2-2ix+2} = 2\pi i\ (\operatorname{Res}(i+1) + \operatorname{Res}(i-1)).$$

Имаме, че

$$\operatorname{Res}(i \pm 1) = \frac{e^{i(i\pm 1)}}{\pm 2}.$$

Тогава

$$I = 2\pi i\, e^{-1} \frac{e^{i} - e^{-i}}{2} = 2\pi i\, e^{-1}\, i \sin 1 = -\frac{2\pi}{e} \sin 1.$$

Задача 5.4.2 *Да се пресметне интеграла*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x\,dx}{x^2-2x+10}.$$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{z^2-2z+10}$. Тя има два прости полюса $1 \pm 3i$, от които само $1+3i$ се намира в горната полуравнина. Тогава

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{xe^{ix}\,dx}{x^2-2x+10} = 2\pi i \operatorname{Res}(1+3i),$$

$$\operatorname{Res}(1+3i) = \left.\frac{ze^{iz}}{2z-2}\right|_{z=1+3i} = \frac{(1+3i)e^{i(1+3i)}}{6i} = \frac{(1+3i)e^{i}}{6e^3 i}.$$

Да означим

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x\,dx}{x^2-2x+10}, \qquad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x\,dx}{x^2-2x+10}.$$

Тогава $I = I_1 + iI_2 = \dfrac{\pi}{3e^3}(1+3i)e^{i}$ и следователно

$$I_1 = \operatorname{Re}\left(\frac{\pi}{3e^3}(1+3i)e^{i}\right) = \frac{\pi}{3e^3}(\cos 1 - 3 \sin 1).$$

Задача 5.4.3 *Да се пресметнат интегралите*

$$\text{(а)} \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$$

$$\text{(б)} \quad \int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin ax}{(1+x^2)^2} dx, \qquad a > 0.$$

Решение. (а) Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{(z^2+1)(z^4+1)}$. Тя има четири прости полюси $\pm i$, $\pm 2i$. Следователно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \left(\operatorname{Res}(i) + \operatorname{Res}(2i)\right).$$

Имаме, че

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(i) \quad &= \left.\frac{e^{iz}}{2z(z^2+4)}\right|_{z=i} = \frac{e^{-1}}{6i}, \\ \operatorname{Res}(2i) \quad &= \left.\frac{e^{iz}}{2z(z^2+1)}\right|_{z=2i} = \frac{e^{-2}}{-12i}. \end{aligned}$$

Тъй като функцията $\dfrac{\cos x}{(x^2+1)(x^2+4)}$ е четна, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{\cos x\, dx}{(x^2+1)(x^2+4)} \quad &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(2\pi i(\frac{e^{-1}}{6i} - \frac{e^{-2}}{12i})\right) \\ &= \pi(\frac{e^{-1}}{6} - \frac{e^{-2}}{12}) = \frac{\pi e^{-2}}{12}(2e-1). \end{aligned}$$

(б) Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{z^3 e^{iaz}}{(1+z^2)^2}$. Тя има два двукратни полюса $\pm i$, от които само i се намира в горната полуравнина. Следователно

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \operatorname{Res}(i).$$

Имаме, че

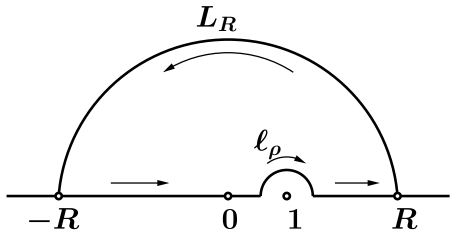
$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(i) = \left.\frac{d}{dz}\frac{z^3 e^{iaz}}{(z+i)^2}\right|_{z=i} \quad &= \left.\frac{z^2 e^{iaz}((3+iaz)(z+i)-2z)}{(z+i)^3}\right|_{z=i} \\ &= \frac{e^{-a}(2-a)}{4}. \end{aligned}$$

Тогава

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz = I_1 + iI_2 = \frac{e^{-a}(2-a)\pi\, i}{2}.$$

Тъй като функцията $\dfrac{x^3 \sin ax}{(1+x^2)^2}$ е четна, то

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 \sin ax}{(1+x^2)^2} dx = \frac{1}{2} I_2 = \frac{1}{2}\mathrm{Im}\left(\frac{e^{-a}(2-a)\pi\, i}{2}\right) = \frac{e^{-a}(2-a)\pi}{4}.$$



Фиг. 5.3: Контурът γ

5.5 Главна стойност на несобствени интеграли

Дефиниция. *Нека функцията $F(x)$ е дефинирана в интервала $[a,b]$ и е прекъсната в точката $c \in (a,b)$.* **Главна стойност на интеграла**

$$\mathbf{v.p.}\int_a^b \boldsymbol{F(x)dx}$$

се нарича границата (ако съществува и е крайна)

$$\lim_{\rho\to 0}\left(\int_a^{c-\rho} F(x)\,dx + \int_{c+\rho}^b F(x)dx\right).$$

Най-напред ще решим една конкретна задача, от която ще стане ясно как се постъпва в общия случай.

Задача 5.5.1 *Намерете, ако съществува,*

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x-1)(x^2+4)}.$$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z^2+4)}$ и контура от фиг. 5.3, където $L_R := \{z : |z| = R,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и $l_\rho := \{z : |z| = \rho,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$.

$$\int_{-R}^{1-\rho} f(x)dx + \int_{l_\rho} f(z)dz + \int_{1+\rho}^{R} f(x)dx + \int_{L_R} f(z)dz = 2\pi i\operatorname{Res}(2i). \quad (5.1)$$

Първо ще пресметнем $\operatorname{Res}(2i)$. Имаме, че

$$\operatorname{Res}(2i) = \frac{1}{2i-1}\cdot\frac{1}{2i+2i} = \frac{1}{4i(2i-1)}.$$

Като заместим в (5.1) и направим граничен преход при $R\to\infty$, получаваме

$$\int_{-\infty}^{1-\rho} f(x)dx + \int_{l_\rho} f(z)dz + \int_{1+\rho}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi}{2(2i-1)}.$$

След граничен преход при $\rho\to\infty$ получаваме

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{\rho\to\infty}\int_{l_\rho} f(z)dz = -\frac{\pi(2i+1)}{10}. \quad (5.2)$$

Сега ще намерим $\lim\limits_{\rho\to\infty}\displaystyle\int_{l_\rho} f(z)dz$. За целта развиваме функцията $f(z)$ в ред на Лоран около точката $z = 1$. Получаваме, че

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-1)(z^2+4)} &= \operatorname{Res}(1)\cdot\frac{1}{z-1} + c_0 + c_1(z-1) + \ldots \\ &= \frac{1}{5} + \varphi(z),\end{aligned}$$

където функцията $\varphi(z) = c_0 + c_1(z-1) + \ldots$ е аналитична в околност на точката $z = 1$ и следователно е ограничена в достатъчно малка околност на $z = 1$, т. е. $|\varphi(z)| \le m$. Тогава е изпълнено, че

$$\left|\int_{l_\rho}\varphi(z)dz\right| \le m\pi\rho \to\ 0 \quad \text{при} \quad \rho\to 0.$$

От друга страна, $\dfrac{1}{5}\displaystyle\int_{l_\rho}\frac{dz}{z-1} = -\frac{1}{5}\pi i$. Тогава от (5.2) получаваме

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \frac{1}{5}\pi i = -\frac{\pi(2i+1)}{10},$$

или

$$\text{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = -\frac{\pi}{10}.$$

Забележка.

(1) *От решението на зад. 5.5.1 е ясно, че ако функцията $f(z)$ има реален прост полюс в точката c и l_ρ е полуокръжността с център т. c (вж. фиг. 5.3 за $c = 1$), дефинирана с*

$$l_\rho : z = c + \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \pi,$$

то

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{l_\rho} f(z)dz = -\pi i\operatorname{Res}(f; c).$$

(2) *Ако реалният полюс не е прост, то главната стойност на интеграла не съществува.*

Задача 5.5.2 *Пресметнете* $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z}$. Тя има единствен прост полюс $z = 0$. Следователно

$$\text{v. p.}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i\operatorname{Res}(0) = 0.$$

Тъй като $\operatorname{Res}(0) = 1$, получаваме, че

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}\operatorname{Im}(\pi i) = \frac{\pi}{2}.$$

Задача 5.5.3 *Да се пресметнат интегралите*

(а) $\text{v. p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x-\xi)} dx, \quad a > 0, \quad -\infty < \xi < \infty,$

(б) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx, \quad a > 0,\ b > 0,$

(в) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx, \quad a > 0,\ b > 0$

(г) $\text{v.p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2} dx, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Решение. (а) Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{z}{(z^2+a^2)(z-\xi)}$. От теоремата за резидуумите получаваме

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x-\xi)} dx - \pi i \operatorname{Res}(\xi) = 2\pi i \operatorname{Res}(ai).$$

Тъй като

$$\operatorname{Res}(\xi) = \frac{1}{\xi^2+a^2}, \qquad \operatorname{Res}(ai) = \frac{1}{2ai(ai-\xi)},$$

то

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi i}{\xi^2+a^2} - \frac{\pi(ai+\xi)}{a(\xi^2+a^2)} = -\frac{\pi\xi}{a(\xi^2+a^2)}.$$

(б) Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{e^{iaz}}{z(z^2+b^2)}$. От теоремата за резидуумите получаваме

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i \operatorname{Res}(f;0) = 2\pi i \operatorname{Res}(f;ib).$$

Тъй като

$$\operatorname{Res}(0) = \frac{1}{b^2}, \qquad \operatorname{Res}(bi) = -\frac{e^{-ab}}{2b^2},$$

то

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i \left(\frac{1}{b^2} - \frac{e^{-ab}}{b^2} \right).$$

Следователно

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x(x^2+b^2)} dx = \frac{1}{2} \frac{\pi}{b^2} (1 - e^{-ab}).$$

(в) Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{e^{iaz} - e^{ibz}}{z^2}$. Имаме, че

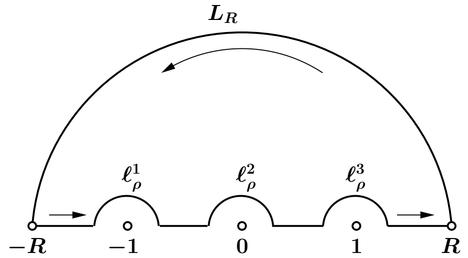
$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i \operatorname{Res}(f;0) = 0.$$

От развитието

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \left(i(a-b)z - \frac{a^2-b^2}{2!} z^2 - \dots \right)$$

следва, че точката $z = 0$ е прост полюс на $f(z)$ и $\operatorname{Res}(0) = i(a-b)$. Следователно

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(i\pi . i(a-b)) = \frac{\pi}{2}(b-a).$$



Фиг. 5.4: Контурът γ

(г) Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{1-e^{i\alpha z}}{z^2}$. Имаме, че

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i \operatorname{Res}(f;0) = 0.$$

От развитието

$$\frac{1-e^{i\alpha z}}{z^2} = -\frac{i\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3 i}{3!} z - \dots$$

следва, че точката $z = 0$ е прост полюс на $f(z)$ и $\operatorname{Res}(0) = -i\alpha$. Следователно

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{i\alpha x}}{x^2} dx = \pi i(-i\alpha) = \pi\alpha.$$

Задача 5.5.4 *Намерете, ако съществува, главната стойност на интеграла*

$$\text{v. p.} \int_0^{\infty} \frac{(x^2+1)\sin 3x}{x^3 - x} dx.$$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{(z^2+1)e^{3iz}}{z^3 - z}$ и контурът γ от фиг. 5.4. Функцията има три реални прости полюса, $z = 0$ и $z = \pm 1$. Тогава е изпълнено, че

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx - \pi i \left(\operatorname{Res}(-1) + \operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}(1)\right) = 0.$$

Тъй като

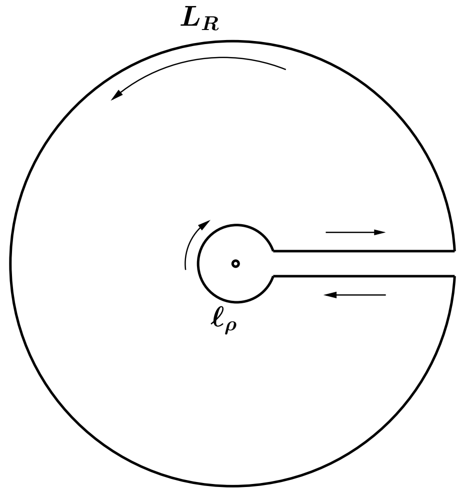
$$\operatorname{Res}(0) = -1, \qquad \operatorname{Res}(\pm 1) = e^{\pm 3i},$$

то

$$\text{v. p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \pi i(-1 + e^{3i} + e^{-3i}) = \pi i(-1 + 2\cos 3).$$

Следователно

$$\text{v. p.} \int_0^{\infty} \frac{(x^2+1)\sin 3x}{x^3 - x} dx = \frac{\pi}{2}(-1 + 2\cos 3).$$



Фиг. 5.5: Контурът γ

5.6 Интеграли от вида $\int_0^\infty \boldsymbol{F(x)(\ln x)^n\,dx}$

Рационалната функция $F(z) = P(z)/Q(z)$ *няма полюси върху реалната полуос* $0 \le x < \infty$, $\deg Q \ge \deg P + 2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 0$.

Първо ще разгледаме случая $n = 0$. *Нека* $f(z) = F(z)\,\mathrm{Log}\,z$, *където* $\mathrm{Log}\,z = \ln|z| + i\arg z$ *е еднозначния клон на логаритмичната функция, за който* $0 < \arg z < 2\pi$. *Разглеждаме областта с контур* γ, *изобразена на фиг. 5.5, като числото* $R > 0$ *е избрано така, че всичките нули* $z_1, \dots, z_m$ *на знаменателя* $Q(z)$ *да лежат във вътрешността на* γ. *От теоремата за резидуумите, приложена за функцията* $f(z)$ *и контура* γ, *получаваме*

$$\int_\rho^R \frac{P(x)}{Q(x)}\ln x dx + \int_{L_R} - \int_\rho^R \frac{P(x)}{Q(x)}(\ln x + 2\pi i)dx + \int_{l_\rho} = 2\pi i \sum_{k=1}^m \mathrm{Res}\,(f; z_k),$$

или

$$\int_{L_R} + \int_{l_\rho} \quad -2\pi\, i \int_\rho^R \frac{P(x)}{Q(x)}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \mathrm{Res}\,(f; z_k). \tag{5.1}$$

От условието $\deg Q \ge \deg P + 2$ *следва, че*[1]

$$\left|\int_{L_R} f(z)dz\right| \le \frac{\mathrm{Const}}{R^2}\sqrt{\ln^2 R + 4\pi^2}\cdot 2\pi R \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

От друга страна, функцията $F(z)$ *е холоморфна в околност на нулата, следователно е ограничена, т. е.* $|F(z)| \le M$. *Тогава е изпълнено, че*

$$\left|\int_{l_\rho} f(z)dz\right| \le 2\pi\rho \cdot \max_{|z|=\rho}|f(z)| \le 2\pi\rho\, M\sqrt{\ln^2\rho + 4\pi^2} \to 0 \text{ при } \rho \to 0.$$

Като извършим граничен преход в (5.1) *при* $R \to \infty$ *и* $\rho \to 0$, *получаваме, че*

$$\int_0^\infty F(x)\,dx = -\sum_{k=1}^m \mathrm{Res}(f, z_k). \tag{5.2}$$

[1]Вж. аналогичното доказателство за несобствени интеграли от рационални функции.

Нека сега $n = 1$*. Разглеждаме функцията* $f(z) = F(z)\,(\operatorname{Log} z)^2$*. От теоремата за резидуумите следва, че*

$$\int_{L_R} + \int_{l_\rho} + \int_\rho^R \frac{P(x)}{Q(x)}\left((\ln x)^2 - (\ln x + 2\pi i)^2\right)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}\,(f; z_k),$$

или

$$\int_{L_R} + \int_{l_\rho} -4\pi i \int_\rho^R F(x)\ln x dx + 4\pi^2 \int_\rho^R F(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}\,(f; z_k).$$

След граничен преход при $R \to \infty$*,* $\rho \to 0$ *получаваме*

$$-4\pi i \int_0^\infty F(x)\ln x\,dx + 4\pi^2 \int_0^\infty F(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k). \tag{5.3}$$

Ако полиномите P *и* Q *са с реални коефициенти, двата интеграла в* (5.3) *са реални числа и можем да ги пресметнем едновременно, отделяйки реалната и имагинерна части в* (5.3)*. В противен случай, по описания по-горе начин за* $n = 0$*, първо пресмятаме* $\int_0^\infty F(x)\,dx$*, след което заместваме стойността му в* (5.3) *за да намерим* $\int_0^\infty F(x)\ln x\,dx$*.*

За произволно n *е в сила следната рекурентна формула*

$$\sum_{s=0}^n \binom{n+1}{s}(2\pi i)^{n-s} I_s = -\sum_{k=1}^m \operatorname{Res}\left(F(z)(\operatorname{Log} z)^{n+1}; a_k\right),$$

където

$$I_s := \int_0^\infty F(x)(\ln x)^s\,dx,$$

и $a_1, \ldots, a_m$ *са нулите на знаменателя* $Q(z)$*.*

По подобен начин се пресмятат интеграли от вида

$$\int_0^\infty \boldsymbol{F(x)x^{-\alpha}\,dx}, \quad \boldsymbol{0 < \alpha < 1},$$

където рационалната функция $F(z) = P(z)/Q(z)$ *няма полюси върху реалната полуос* $0 \le x < \infty$ *и* $\deg Q \ge \deg P + 1$*. За целта разглеждаме функцията*

$$f(z) = F(z)z^{-\alpha} = F(z)e^{-\alpha \operatorname{Log z}} = e^{-\alpha(\ln|z| + i \arg \mathrm{z})}$$

и контура γ *от фиг. 5.5. От теоремата за резидуумите следва, че*

$$\int_{L_R} + \int_{l_\rho} + \int_\rho^R F(x)\left(e^{-\alpha \ln x} - e^{-\alpha(\ln x + 2\pi i)}\right)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}\,(f; z_k),$$

т. е.

$$\int_{L_R} + \int_{l_\rho} \quad +(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_\rho^R F(x)x^{-\alpha}dx = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}\,(f; z_k).$$

След граничен преход при $R \to \infty$*,* $\rho \to 0$ *получаваме*

$$\int_0^\infty R(x)x^{-\alpha}\,dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{-2\pi i\alpha}} \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k). \tag{5.4}$$

Задача 5.6.1 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^\infty \frac{xdx}{x^3+1}.$$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{z}{z^3+1}\mathrm{Log}\, z$ и областта с контур γ от фиг. 5.5. Функцията $f(z)$ има три прости полюса $z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$, принадлежащи на областта. Имаме, че

$$\mathrm{Res}\,(f; z_k) = \frac{z_k \,\mathrm{Log}\, z_k}{(z^3+1)'_{z=z_k}} = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{Log}\, z_k}{z_k},$$

откъдето получаваме

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}\,(e^{\frac{i\pi}{3}}) &= \frac{1}{3}e^{-\frac{i\pi}{3}}\frac{\pi i}{3} = \frac{\pi i}{18}(1 - i\sqrt{3}),\\
\mathrm{Res}\,(-1) &= -\frac{1}{3}\pi i,\\
\mathrm{Res}\,(e^{\frac{5\pi i}{3}}) &= \frac{\pi i}{18}(5 + 5i\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

Сега от (5.2) следва, че

$$I = -\mathrm{Res}\,(e^{i\pi/3}) - \mathrm{Res}\,(-1) - \mathrm{Res}\,(e^{5\pi i/3}) = \frac{2\pi\sqrt{3}}{9}.$$

Задача 5.6.2 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x)^3}dx.$$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{(\mathrm{Log}\, z)^2}{(1+z)^3}$. Тя има трикратен полюс $z = -1$, който лежи във вътрешността на кривата γ от фиг. 5.5. От (5.3) следва, че

$$-4\pi i I + 4\pi^2 \int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} = 2\pi i \mathrm{Res}\,(-1).$$

Тъй като

$$\mathrm{Res}\,(-1) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dz^2}\mathrm{Log}^2 z\Big|_{z=-1} = \frac{1-\mathrm{Log}\, z}{z^2}\Big|_{z=-1} = 1 - \pi i,$$

получаваме, че

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x)^3} = \frac{2\pi^2}{4\pi^2} = \frac{1}{2}$$

и

$$I = \frac{2\pi i}{-4\pi i} = -\frac{1}{2}.$$

Задача 5.6.3 *Да се пресметне интеграла*

$$I_1 = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+2x+2}dx.$$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{(\operatorname{Log} z)^2}{z^2+2z+2}$. Тя има два прости полюса $-1 \pm i$, които лежат във вътрешността на кривата γ от фиг. 5.5. Да означим

$$I_2 = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+2}.$$

От (5.3) следва, че

$$-4\pi i\, I_1 + 4\pi^2\, I_2 = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(-1+i) + \operatorname{Res}(-1-i)\big).$$

Имаме, че

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(-1+i) &= \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{2(z+1)}\Big|_{z=-1+i} = \frac{\operatorname{Log}^2(-1+i)}{2i} = \frac{(\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4})^2}{2i},\\
\operatorname{Res}(-1-i) &= \frac{(\operatorname{Log} z)^2}{2(z+1)}\Big|_{z=-1-i} = \frac{\operatorname{Log}^2(-1-i)}{-2i} = \frac{(\ln\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4})^2}{-2i}.
\end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned}
-4\pi i\, I_1 + 4\pi^2\, I_2 &= \pi\Big((\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4})^2 - \big(\ln\sqrt{2} + i\frac{5\pi}{4}\big)^2\Big)\\
&= \pi\Big(2i\ln\sqrt{2}(\frac{3\pi}{4} - \frac{5\pi}{4}) - \frac{9\pi^2}{16} + \frac{25\pi^2}{16}\Big)\\
&= \pi(-\pi i\ln\sqrt{2} + \pi^2) = \pi^3 - \frac{\pi^2}{2} i\ln 2.
\end{aligned}$$

Следователно

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{-\pi^2\ln 2}{2(-4\pi)} = \frac{\pi\ln 2}{8},\\
I_2 &= \frac{\pi^3}{4\pi^2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

Задача 5.6.4 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Решение. Разглеждаме функцията

$$f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)} = \frac{e^{-\alpha(\ln|z| + i\arg z)}}{1+z}.$$

От (5.4) следва, че

$$I = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i\alpha}}\operatorname{Res}(-1) = \frac{2\pi i\operatorname{Res}(-1)}{e^{-\pi i\alpha}2i\sin\pi\alpha}.$$

Тъй като $\operatorname{Res}(-1) = e^{-\alpha(\ln 1 + i\pi)} = e^{-\alpha i\pi}$, получаваме, че

$$I = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}.$$

Задача 5.6.5 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+1)^2\,(x^2+x+1)}.$$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}\,(z+1)^2\,(z^2+z+1)}$. Тя има двукратен полюс $z_0 = -1$ и два прости полюса $z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ и $z_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, и трите принадлежащи на вътрешността на кривата γ от фиг. 5.5. В нашия случай $\alpha = 1/2$. От (5.4) следва, че

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{1-e^{-\pi i}}\big(\mathrm{Res}\,(z_0) + \mathrm{Res}\,(z_1) + \mathrm{Res}\,(z_2)\big) \\ &= \pi i\,\big(\mathrm{Res}\,(z_0) + \mathrm{Res}\,(z_1) + \mathrm{Res}\,(z_2)\big). \end{aligned}$$

Първо ще пресметнем $\mathrm{Res}\,(z_1)$ и $\mathrm{Res}\,(z_2)$.

$$\mathrm{Res}\,(z_{1,2}) = \frac{1}{\sqrt{z}\,(z+1)^2\,(2z+1)}\bigg|_{z=z_{1,2}}.$$

Имаме, че

$$\begin{aligned} 2e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1 &= 2\Big(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\Big) + 1 = \sqrt{3}\,i, \\ \big(e^{\frac{2\pi i}{3}} + 1\big)^2 &= e^{\frac{2\pi i}{3}}\big(e^{\frac{\pi i}{3}} + e^{-\frac{\pi i}{3}}\big)^2 = e^{\frac{2\pi i}{3}} \cdot 4\cos^2\frac{\pi}{3} = e^{\frac{2\pi i}{3}}. \end{aligned}$$

Аналогично получаваме

$$\begin{aligned} 2e^{\frac{4\pi i}{3}} + 1 &= -\sqrt{3}\,i, \\ \big(e^{\frac{4\pi i}{3}} + 1\big)^2 &= e^{\frac{4\pi i}{3}} \cdot 4\cos^2\frac{2\pi}{3} = e^{\frac{4\pi i}{3}}. \end{aligned}$$

Тогава

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(z_1) &= \frac{1}{e^{\frac{\pi i}{3}}e^{\frac{2\pi i}{3}}\sqrt{3}\,i} = \frac{i}{\sqrt{3}}, \\ \mathrm{Res}\,(z_2) &= \frac{1}{e^{\frac{2\pi i}{3}}e^{\frac{4\pi i}{3}}(-\sqrt{3}\,i)} = \frac{i}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Остана да пресметнем $\mathrm{Res}\,(-1)$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,(-1) &= \left(\frac{1}{\sqrt{z}\,(z^2+z+1)}\right)'_{z=-1} \\ &= \frac{-1}{z\,(z^2+z+1)^2}\left(\frac{5}{2}z\sqrt{z} + \frac{3}{2}\sqrt{z} + \frac{1}{2\sqrt{z}}\right)\bigg|_{z=-1}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Тъй като

$$\sqrt{-1} = e^{\frac{1}{2}\,\mathrm{Log}\,(-1)} = e^{\frac{1}{2}\,i\pi} = i,$$

като заместим в (5.5), получаваме, че $\mathrm{Res}\,(-1) = -\dfrac{3}{2}i$. Следователно

$$I = \pi i\left(-\frac{3}{2}i + \frac{2i}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}}\pi.$$

Задача 5.6.6 *Да се пресметне интеграла*

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}(x^2+x+1)}.$$

Решение. Разглеждаме функцията $f(z) = \dfrac{1}{z^{\frac{2}{3}}(z^2+z+1)}$. Тя има два прости полюса $z_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ и $z_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, намиращи се във вътрешността на кривата γ от фиг. 5.5. В нашия случай $\alpha = 2/3$ и от (5.4) следва, че

$$I = \frac{2\pi i}{e^{-\frac{2\pi i}{3}} 2i \sin\frac{2\pi}{3}} \big(\mathrm{Res}\,(z_1) + \mathrm{Res}\,(z_2)\big).$$

Сега ще пресметнем $\mathrm{Res}\,(z_1)$ и $\mathrm{Res}\,(z_2)$.

$$\mathrm{Res}\,(z_1) = \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}(2z+1)}\bigg|_{z=e^{\frac{2\pi i}{3}}} = \frac{e^{-\frac{4\pi i}{9}}}{2e^{\frac{2\pi i}{3}}+1} = \frac{e^{-\frac{4\pi i}{9}}}{i\sqrt{3}},$$

$$\mathrm{Res}\,(z_2) = \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}(2z+1)}\bigg|_{z=e^{\frac{4\pi i}{3}}} = \frac{e^{-\frac{8\pi i}{9}}}{2e^{\frac{4\pi i}{3}}+1} = \frac{e^{-\frac{8\pi i}{9}}}{-i\sqrt{3}}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} I &= \frac{2\pi i}{e^{-\frac{2\pi i}{3}} 2i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{e^{-\frac{4\pi i}{9}} - e^{-\frac{8\pi i}{9}}}{i\sqrt{3}} \\ &= -\frac{2\pi i}{3e^{-\frac{2\pi i}{3}}} e^{-\frac{2\pi i}{3}} \left(e^{\frac{2\pi i}{9}} - e^{-\frac{2\pi i}{9}}\right) = -\frac{2\pi i}{3} 2i \sin\frac{2\pi}{9} = \frac{4\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{9}. \end{aligned}$$

5.7 Сумиране на редове

Теорема 1. *Нека функцията $f(z)$ е аналитична в цялата равнина с изключение на краен брой полюси $z_1, \dots, z_m$, $z_k \notin \mathbb{Z}$, $k = 1, \dots, m$. Нека*

$$\int_{C_n} F(z)dz \to 0 \ \text{при}\ n \to \infty,$$

където $C_n : |z| = n + \dfrac{1}{2}$ и

$$\textbf{(а)}\ F(z) = \pi f(z)\mathrm{cotg}\,\pi z, \quad \textbf{(б)}\ F(z) = \frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}.$$

Тогава е изпълнено, че

$$\textbf{(а)} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{-n}^{n} f(n) = -\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(F; z_k), \tag{5.1}$$

$$\textbf{(б)} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) = -\sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(F; z_k). \tag{5.2}$$

■

Доказателство. *Избираме n толкова голямо, че $|z_k| < n$, $k = 1, \dots, m$. Полюсите на функцията $F(z)$, които се намират във вътрешността на кривата C_n, са z_k, $k = 1, \dots, m$ и простите полюси s, $s = \pm 1, \dots, \pm n$, които са нули на $\sin \pi z$. Лесно се пресмятат*

$$\textbf{(а)}\ \mathrm{Res}\,(F; s) = f(s), \quad \textbf{(б)}\ \mathrm{Res}\,(F; s) = (-1)^s f(s).$$

Тогава от теоремата за резидуумите следва, че

$$\textbf{(а)} \qquad \int_{C_n} F(z)dz = 2\pi i\bigg(\sum_{s=-n}^{n} f(s) + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(F; z_k)\bigg),$$

$$\textbf{(б)} \qquad \int_{C_n} F(z)dz = 2\pi i\bigg(\sum_{s=-n}^{n} (-1)^s f(s) + \sum_{k=1}^{m} \mathrm{Res}\,(F; z_k)\bigg).$$

Твърдението в теоремата се получава след граничен преход при $n \to \infty$. ■

Следствие 1. *Нека $f(z) = P(z)/Q(z)$ е рационална функция, такава че $\deg Q \geq \deg P + 1$. Тогава е изпълнено* (5.1).

Доказателство. *Ще докажем, че функцията $f(z)$ удовлетворява условията на Теорема 1. За целта първо ще докажем, че функцията $\operatorname{cotg} \pi z$ е ограничена в областта*

$$G = \mathbb{C} \setminus \left\{ z : |z| \leq \frac{1}{4},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\}.$$

Тъй като функцията $\operatorname{cotg} \pi z$ е периодична с период единица, достатъчно е да докажем, че е ограничена например в затворената област

$$\overline{D} = \overline{G} \cap \{ z = x + iy : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1 \}.$$

Нека първо $z \in \overline{D} \cap \{ z : |\operatorname{Im} z| \leq 1 \}$. Това е компактно множество, в което функцията $\operatorname{cotg} \pi z$ е непрекъсната, следователно е ограничена.

Нека сега $z \in \overline{D} \cap \{ z : |\operatorname{Im} z| > 1 \}$. Ако $\operatorname{Im} z > 1$, имаме, че

$$\begin{aligned} |\operatorname{cotg} \pi z| &= \left| \frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}} \right| \leq \frac{e^{-\pi y} + e^{\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} \\ &= \frac{1 + e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} \leq \frac{1 + e^{-2\pi}}{1 - e^{-2\pi}} = \text{Const.} \end{aligned}$$

Случаят $\operatorname{Im} z < -1$ се разглежда аналогично.
Дотук доказахме, че

$$|\operatorname{cotg} \pi z| \leq M, \quad \text{за всяко } z \in G.$$

По-нататък, да разгледаме първо случая, когато $\deg Q \geq \deg P + 2$. Тъй като $C_n \subset G$, имаме, че

$$\left| \int_{C_n} \pi f(z) \operatorname{cotg} \pi z \right| \leq \frac{\text{Const}\,.M.2\pi(n + \frac{1}{2})}{n^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Ако $\deg Q \geq \deg P + 1$, представяме $f(z)$ във вида

$$f(z) = \text{Const}.\frac{1}{z} + \frac{P_1(z)}{Q_1(z)},$$

където $\deg Q_1 \geq \deg P_1 + 2$. Тъй като

$$\int_{C_n} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z} dz = 0 \quad (\textit{зад. 5.1.7}),$$

то

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_n} \pi f(z) \operatorname{cotg} \pi z \right| &= \left| \text{Const}. \int_{C_n} \frac{\operatorname{cotg} \pi z}{z} dz + \int_{C_n} \frac{\pi P_1}{Q_1} \operatorname{cotg} z dz \right| \\ &= \left| \int_{C_n} \frac{\pi P_1}{Q_1} \operatorname{cotg} z dz \right| \to 0, \end{aligned}$$

което следва от предишния случай. ■

Задача 5.7.1 *Да се намери сумата на реда* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Решение. Разглеждаме функцията $F(z) = \dfrac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^2}$. От Теорема 1, **(a)** и Следствие 1 получаваме, че

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = -\operatorname{Res}(F;0).$$

От представянето

$$F(z) = \frac{1}{z^3}\left(\frac{\pi\cos\pi z}{\pi - \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \dots}\right) = \frac{1}{z^3}\frac{\pi\cos\pi z}{\varphi(z)},$$

където $\varphi(0) = \pi$, следва, че точката $z = 0$ е трикратен полюс на $F(z)$. Следователно

$$\operatorname{Res}(F;0) = \frac{1}{2!}\left(\frac{\pi\cos\pi z}{\varphi(z)}\right)''_{z=0} = -\frac{\pi^2}{3},$$

откъдето получаваме, че

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Задача 5.7.2 *Да се намери сумата на реда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0.$$

Решение. Разглеждаме функцията $F(z) = \dfrac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z^2 + a^2}$. Имаме, че

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} = -\big(\operatorname{Res}(ai) + \operatorname{Res}(-ai)\big).$$

Тъй като

$$\operatorname{Res}(ai) = \operatorname{Res}(-ai) = \frac{\pi \operatorname{cotg} \pi ai}{2ai} = -\frac{\pi}{2a}\operatorname{cth}\pi a,$$

получаваме, че

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2}\big(\pi a \operatorname{cth}\pi a - 1\big).$$

Задача 5.7.3 *Нека $a \notin \mathbb{Z}$. Като пресметнете сумата на реда*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n - a},$$

намерете разлагането на функцията $\operatorname{cotg} \pi z$ *в сбор от елементарни дроби.*

Решение. Разглеждаме функцията $F(z) = \dfrac{\pi \operatorname{cotg} \pi z}{z - a}$. Тъй като $\operatorname{Res}(a) = \pi \operatorname{cotg} \pi a$, получаваме, че

$$\pi \operatorname{cotg} \pi a = \frac{1}{a} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-a} - \frac{1}{n+a}\right). \tag{5.3}$$

Като запишем последното равенство във вида

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z+n} - \frac{1}{n} \right), \ z \notin \mathbb{Z}$$

получаваме разлагането на функцията $\pi \operatorname{cotg} \pi z$ в сбор от елементарни дроби. Ще отбележим, че от (5.3) следва още, че

$$\pi \operatorname{cotg} \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}, \ z \notin \mathbb{Z}.$$

Задача 5.7.4 *Нека $a \notin \mathbb{Z}$. Като пресметнете сумата на реда*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a-n},$$

намерете разлагането на функцията $\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ в сбор от елементарни дроби.

Решение. В случая $f(z) = \dfrac{1}{a-z}$ и $F(z) = \dfrac{\pi}{(a-z)\sin \pi z}$. От (5.2) следва, че

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a-n} = -\operatorname{Res}(F; a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Следователно разлагането на функцията $\dfrac{\pi}{\sin \pi z}$ в сбор от елементарни дроби е

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z-n} = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}.$$

Задача 5.7.5 *Да се намери сумата на реда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}.$$

Решение. Разглеждаме функцията

$$F(z) = \frac{\pi}{(2z+1)^3 \sin \pi z} = \frac{\pi}{8(z+\frac{1}{2})^3} \cdot \frac{1}{\sin \pi z}.$$

Имаме, че

$$\operatorname{Res}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{16} \left(\frac{1}{\sin \pi z} \right)''_{z=-\frac{1}{2}} = -\frac{\pi^3}{16}.$$

Следователно

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Задача 5.7.6 *Да се намерят сумите на следните редове*

(а) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+a^2},\quad a\neq 0,$

(б) $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+a)^2}\quad a\notin\mathbb{Z},$

(в) $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos\alpha n}{n^2+a^2}\quad -\pi<\alpha<\pi,$

(г) $\displaystyle\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{i\alpha n}}{(n-a)^2}\quad -\pi<\alpha<\pi.$

Отг. **(а)** $\displaystyle\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{a\operatorname{sh}\pi a}+\frac{1}{a^2}\right),$

(б) $\displaystyle\pi^2\frac{\cos\pi a}{\sin^2\pi a},$ **(в)** $\displaystyle\pi\frac{\operatorname{ch}\alpha a}{a\operatorname{sh}\pi a},$

(г) $\displaystyle\pi\frac{e^{i\alpha a}}{\sin\pi a}\big(\pi\operatorname{cth}\pi a-i\alpha\big).$

5.8 Логаритмичен индикатор. Теорема на Руше

Нека функцията $f:G\to\mathbb{C}$ *е холоморфна и* $f(z)\neq 0\ \forall\, z\in G$.

Дефиниция 1. Логаритмична производна *на* $f(z)$ *се нарича функцията*

$$\varphi(z)=(\operatorname{Log}f(z))'=\frac{f'(z)}{f(z)},$$

ако съществува еднозначен клон на $\operatorname{Log}f(z)$ *в областта.*

Особени точки на $\varphi(z)$ *могат да бъдат само нулите или особените точки на* $f(z)$.

Ако $z=a$ *е* m*-кратна нула на* $f(z)$*, то* $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'}{f};a\right)=m.$

Ако $z=a$ *е* p*-кратен полюс на* $f(z)$*, то* $\operatorname{Res}\left(\dfrac{f'}{f};a\right)=-p.$

Дефиниция 2. *Величината*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz$$

се нарича **логаритмичен индикатор** *на функцията* $f(z)$ *относно* γ*, където* γ *е контура на областта* G*..*

Теорема за логаритмичния индикатор. *Нека функцията* $f(z)$ *е аналитична в област* G *и по границата ѝ* γ*, с изключение на краен брой полюси, принадлежащи на* G*. Тогава*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f'(z)}{f(z)}dz=N-P,$$

където N и P означават съответно броят на нулите и полюсите на f, принадлежащи на G. ■

Теорема на Руше. *Нека $f(z)$ и $\varphi(z)$ са аналитични функции в област G и по контура ѝ γ, като $|f(z)| > |\varphi(z)| \quad \forall z \in \gamma$. Тогава функциите $f(z)+\varphi(z)$ и $f(z)$ имат един и същ брой нули в G (отчитайки кратността им).*
■

Задача 5.8.1 *Намерете броя на нулите на функцията*

$$F(z) = z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$$

вътре в кръга $|z| < 1$.

Решение. Полагаме

$$f(z) = -4z^5, \qquad \varphi(z) = z^8 + z^2 - 1.$$

Тогава

$$|f(z)|_{|z|=1} = |-4z^5| = 4,$$

$$|\varphi(z)|_{|z|=1} = |z^8 + z^2 - 1| \leq |z^8| + |z^2| + 1 = 3.$$

Следователно $|f(z)|_{|z|=1} > |\varphi(z)|_{|z|=1}$. Функцията $f(z)$ има 5-кратна нула в $z = 0$. От теоремата на Руше следва, че функцията $F(z)$ има 5 нули вътре в кръга $|z| < 1$.

Задача 5.8.2 *Намерете броя на корените на уравнението*

$$z^6 - 6z + 10 = 0$$

вътре в кръга $|z| < 1$.

Решение. Полагаме $f(z) = 10$, $\varphi(z) = z^6 - 6z$. При $|z| = 1$ имаме $|f(z)| = 10$, $|\varphi(z)| \leq 7$ и следователно $|f(z)| > |\varphi(z)|$. Тъй като функцията $f(z)$ очевидно няма нули, то и $F(z) = f(z) + \varphi(z)$ няма нули при $|z| < 1$.

Задача 5.8.3 *Намерете броя на корените на уравнението*

$$z^4 - 5z + 1 = 0$$

вътре в пръстена $1 < |z| < 2$.

Решение. При $|z| < 1$ полагаме $f(z) = -5z$, $\varphi(z) = z^4 + 1$. От теоремата на Руше следва, че броят на нулите в указания кръг е $N_1 = 1$. При $|z| < 2$ полагаме $f(z) = z^4$, $\varphi(z) = 1 - 5z$, откъдето получаваме както по–горе, че броя на нулите е $N_2 = 4$. Следователно броят на нулите в пръстена $1 < |z| < 2$ е $N = N_2 - N_1 = 3$.

Задача 5.8.4 *Намерете броя на корените на уравнението*

$$4z^4 - 29z^2 + 25 = 0$$

вътре в пръстена $2 < |z| < 3$.

Отг. $f(z) = 29z^2,\ \varphi(z) = 4z^4 + 25, \quad |z| < 2,\ N_1 = 2,$

$f(z) = 4z^4,\ \varphi(z) = 29z^2 + 25, \quad |z| < 3,\ N_2 = 4,$

$N = N_2 - N_1 = 2.$

Литература

[1] Т. Аргирова, Теория на аналитичните функции, *СУ „Св. Кл. Охридски“*, София, 1992.

[2] Т. Аргирова, Т. Генчев, Сборник от задачи по теория на аналитичните функции, София, 1992.

[3] М. А. Евграфов, Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, К. А. Бежанов, Сборник задач по теории аналитических функций, *Наука*, Москва, 1969.

[4] М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, Функции комплексного переменного, операционное вчисление, теория устойчивости, *Наука*, Москва , 1981.

[5] А. И. Маркушевич, Краткий курс теории аналитических функций, *Наука*, Москва , 1966.

[6] Д. Пойя, Г. Сегьо, Задачи и теореми по анализ, том 1, *Наука и изкуство*, София, 1974.

[7] И. И. Привалов, Введение в теорию функций комплексного переменного, *Наука*, Москва , 1984.

[8] Л. Д. Фаддев, О. Я. Якубовский, Лекции по квантовой механике (для студентов математиков), Ленинград, 1980.